Rechnen mit dB

Wilfried Speltacker
DL9NAM

DL9NAM

Eine einfache Aufgabe (?)

Eine verlustbehaftete Leitung verliere je Meter 4.5% der Leistung. Wie groß ist der Verlust nach 10 m?

$P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7 \quad P_8 \quad P_9 \quad P_{10}$

Es sei $a = \frac{P_1}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} = ... = \frac{P_{i+1}}{P_i} = ... = \frac{P_{10}}{P_9}$. Damit wird dann berechnet:

$P_1 = a \cdot P_0$

$P_2 = a \cdot P_1 = a^2 \cdot P_0$

$P_3 = a \cdot P_2 = a^3 \cdot P_0$ und für k Abschnitte $P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k} a_i$ und schließlich mit $a_i = a = const$

$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k} a_i = a^k \cdot P_0$ und für k = 10 $P_{10} = a^{10} \cdot P_0$

Ist der Verlust je Meter 4.5%, dann ist $P_i = (1 - 0.045) \cdot P_{i-1}$
und damit $a = (1 - 0.045) = 0.955$

DL9NAM

Rechnen mit Logarithmen

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Die Größe a im vorangegangenen Beispiel ist das Verhältnis zweier Leistungen, die am Ende einer 1 m Strecke, bezogen auf die am Anfang dieser Strecke. Sie ist damit dimensionslos (da sich die Einheit W im Beispiel kürzt).

Um diese Beispielaufgabe zu lösen ist es notwendig, die Größe a mit der Anzahl der Leitungsstücke (mit je 1 m Länge) zu potenzieren. Diese unpraktische Berechnung kann vermieden werden, wenn man sich an Regeln der Potenz-/Logarithmenrechnung erinnert:

- Multiplikation / Division zweier Zahlen geht über in eine Addition / Subtraktion und
- Potenzierung geht über in eine Multiplikation.

Beispiel:

$x = \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ bzw. $y = \log(a/b) = \log(a) - \log(b)$

$u = B^a \cdot B^b = B^{a+b}$ $\qquad$ $v = B^a / B^b = B^{a-b}$

$z = \log(a^k) = k \cdot \log(a)$

Da ähnliche Aufgabenstellungen in der Elektrotechnik sehr häufig sind, hat man schon früh Verhältnisangaben durch deren Logarithmus ausgedrückt, um die Berechnung zu vereinfachen. Historisch gab es dabei zwei verschiedene Ansätze: Das Neper [N], basierend auf dem natürlichen Logarithmus und das Bel [B] auf dem Zehnerlogarithmus.

DL9NAM

Definitionen

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Mit $a = \frac{P_{out}}{P_{in}}$ erhält man

$\boxed{n = \ln\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) = \ln(a)}$ [N] das Verhältnis in Neper, und

$\boxed{b = \log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) = \log(a)}$ [B] das Verhältnis in Bel.

Um das Rechnen mit sehr kleinen Zahlen zu vermeiden, wurde auf die um eine Zehnerpotenz kleinere Einheit umgerechnet und man erhielt das dB (dezi-Bel) mit

$\boxed{b = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) = 10 \cdot \log(a)}$ [dB]

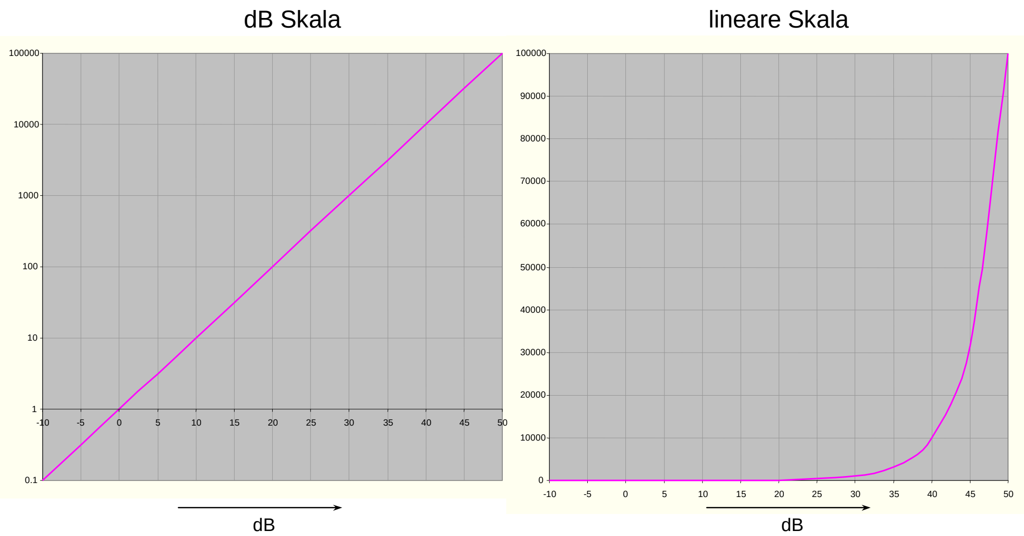
Das dB (bzw. B oder N) ist eine Pseudoeinheit, da sie lediglich das logarithmische Verhältnis zweier Werte gleicher Dimension ist und nur eine Rechenvereinfachung darstellt.

Umrechnung von Neper in dB: $b = 10 \cdot n \cdot \log(e) \approx 4.3429 \cdot n$

DL9NAM

Darstellbarer Zahlenumfang

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.



DL9NAM

Rechenbeispiel

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Mit a = 0.955 aus dem Beispiel wird

$d = 10 \cdot \log(0.955) = -0.2$ dB je m

und die Dämpfung nach l Meter

$d_l = -0.2 \cdot l$

Der Wert ist < 0, da a < 1 und es handelt sich daher um eine Dämpfung.

Handelt es sich bei Zahlenangaben eindeutig um Dämpfungen bzw. Verluste, so wird das negative Vorzeichen oft weggelassen.

Dämpfungsangaben von Kabeln wird daher nicht so wie im Beispiel, sondern gleich in dB/m angegeben.

l [m]	$a_l = a^l$	d [dB]
0	1	0
1	0.9550	-0.2
2	0.9120	-0.4
3	0.8710	-0.6
4	0.8318	-0.8
5	0.7943	-1.0
6	0.7586	-1.2
7	0.7244	-1.4
8	0.6918	-1.6
9	0.6607	-1.8
10	0.6310	-2.0

DL9NAM

Rechenregeln

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Aus der Definition $d = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) = 10 \cdot \log(a)$ wird mit $P = \frac{U^2}{R}$

$d = 10 \cdot \log\left(\frac{U_{out}^2}{U_{in}^2} \cdot \frac{R_{in}}{R_{out}}\right)$ bzw. wenn $R_{in} = R_{out}$ $d = 10 \cdot \log\left(\frac{U_{out}^2}{U_{in}^2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{U_{out}}{U_{in}}\right)$

Ist $R_{in} \neq R_{out}$ so kann man aus dem Spannungsverhältnis nicht das Leistungsverhältnis ermitteln, sondern es muss mit dem Widerstandsverhältnis korrigiert werden.

$$d = 20 \cdot \log\left(\frac{U_{out}}{U_{in}}\right) + 10 \cdot \log\left(\frac{R_{in}}{R_{out}}\right)$$

Bei reinen Spannungsverstärkern (z.B. NF Technik) werden die Innen- und Abschlusswiderstände in der Regel vernachlässigt.

Ist $P_{out} > P_{in}$ so handelt es sich um eine Verstärkung und es ist $d > 0$.
Allgemein gilt

$$d = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) = -10 \cdot \log\left(\frac{P_{in}}{P_{out}}\right)$$

DL9NAM

Spezialfälle

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Da sich mit dem dB nur relative (Verhältnis-) Angaben machen lassen, wurden einige Spezialfälle definiert, um auch absolute Angaben zu ermöglichen.

1. Als Standardreferenz wird 1 mW definiert und der damit ermittelte Wert als dBm bezeichnet. Für 1 W erhält man dann

$$p = 10 \cdot \log\left(\frac{1W}{1mW}\right) = 10 \cdot \log(1000) = 30 \text{ dBm}$$

2. Wird als Referenz 1 µV definiert, so erhält man (zumeist unter der Vernachlässigung des Innenwiderstands der Quelle bzw. Senke) das dBµV. Für 1 V erhält man damit

$$p = 20 \cdot \log\left(\frac{1V}{1\mu V}\right) = 20 \cdot \log(1000000) = 120 \text{ dB}\mu\text{V}$$

DL9NAM

Beispiele (1)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Beispiel 1:
Wird ein Verstärker mit 20-facher Verstärkung über ein 10 m langes Kabel mit –0.2 dB/m mit einem Verbraucher (Empfänger) verbunden, so ist die Gesamtbilanz

$$a = 10\cdot\log(20) - 10\cdot 0.2 = \underbrace{\underbrace{10\cdot\log(2)}_{=3.0} + \underbrace{10\cdot\log(10)}_{=10.0}}_{\text{Verstärker}} \underbrace{\underbrace{-10\cdot 0.2}_{=2.0}}_{\text{Kabel}} = 11 \ \text{dB}$$

Beispiel 2:
Zur Messung der Ausgangsleistung eines Senders steht ein Messgerät mit 1 W Vollausschlag zur Verfügung. Wie groß muss das Dämpfungsglied dimensioniert sein, um den Messbereich auf 100 W zu erweitern?

$$a = 10\cdot\log\left(\frac{1}{100}\right) = -20 \ \text{dB}$$

Zur Berechnung des passenden Dämpfungsgliedes ist zu berücksichtigen, dass

$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{U_{out}^2}{U_{in}^2}\cdot\frac{R_{in}}{R_{out}}$ und mit $R_{out} = R_{in}$ $a_u = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \sqrt{\frac{P_{out}}{P_{in}}}$ ist, d.h. im Beispiel $a_u = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$.

DL9NAM

Beispiele (2)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Abgesehen davon, dass bei Verhältnisangaben in dB eine Multiplikation in eine Addition, eine Division in eine Subtraktion und eine Potenzierung in eine Multiplikation übergeht, lassen sich damit auch sehr große und kleine Werte problemlos angeben.

Die Dämpfung bei der Freiraumausbreitung ist

$$a_0 = \left(\frac{\lambda}{4\pi\cdot r}\right)^2 \quad \text{bzw.}\ a_0^{'} = 20\cdot\log\left(\frac{r}{\lambda}\right) - 20\cdot\log(4\pi) = -\left[22 + 20\cdot\log\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]\text{dB} \ \text{ für } r >> \lambda$$

Im 2 m Band wird dann für 100 km

$$a_0 = 2.53\cdot 10^{-12} \ \text{ bzw. } a_0^{'} = -116 \ \text{dB}$$

Bei einem Gewinn der Sendeantenne von 12 dBi und der Empfangsantenne von 18 dBi, wird die Gesamtdämpfung

$$a_{tot}^{'} = -116 + 12 + 18 = -86 \ \text{dB}$$

Die Sendeleistung sei 100 W, was 50 dBm entspricht und die Empfangsleistung wird damit 50 – 86 = -36 dBm. An der 50 Ohm Abschlussimpedanz der Antenne stehen dann 0.25 µW bzw. 3.54 mV zur Verfügung (57 dB über S9).

DL9NAM

Anwendung: IM3 des Empfängers

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Treffen mehrere starke Empfangssignale auf einen Empfänger, so entstehen auch ungewünschte Mischprodukte, die die Empfangsleistung erheblich beeinflussen können.

2. Ordnung: $2 \cdot f_1$ und $2 \cdot f_2$ und $|f_1 \pm f_2|$
3. Ordnung: $3 \cdot f_1$ und $3 \cdot f_2$ und $|2 \cdot f_1 \pm f_2|$ und $|f_1 \pm 2 \cdot f_2|$
4. Ordnung: $4 \cdot f_1$ und $4 \cdot f_2$ und $|3 \cdot f_1 \pm f_2|$ und $|2 \cdot f_1 \pm 2 \cdot f_2|$ und $|f_1 \pm 3 \cdot f_2|$

Man erkennt an den möglichen Intermodulationsprodukten, dass besonders die 3. Ordnung problematisch sind, da diese in das zu empfangende bzw. zu verstärkende Band fallen (z.B. bei 28.8 MHz und 28.9 MHz entstehen Mischprodukte bei 29.0 MHz und 28.7 MHz). Daher wird bei Empfängern und Verstärkern deren Intermodulationsabstand 3. Ordnung in Abhängigkeit vom Eingangssignal (der sog. IM3 Abstand) bzw. der IM3 Intercept Wert angegeben. Das ist genau die Summen-Eingangsleistung (bei Empfängern), bei welcher der IM3 Abstand 0 dB wird. Da die IM3 Produkte in erster Näherung mit der 3. Potent gegenüber dem Eingangssignal ansteigen, kann man vom IM3 Interpept den IM3 Abstand zu $2 \cdot x$ abschätzen, wenn man um x dB (Summen-Nutzsignal) darunter arbeitet.

Die Eingangsleistung beim IM3 Intercept wird oft in dBm angegeben.

DL9NAM

Anwendung: Antennen (1)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Der Gewinn einer Antenne wird oft in dB angegeben. Da das dB keine absolute Größe darstellt, erfordert das eine Referenzantenne, die als Bezug verwendet wird. Zwei unterschiedliche Bezugssysteme sind im Gebrauch.

1. Der idealisierte Hertzsche Halbwellendipol. Angaben, die sich darauf beziehen werden dBd genannt.

2. Der isotrope Kugelstrahler. Diese Angaben werden dBi genannt.

Da der Hertzsche Halbwellendipol einen Gewinn gegenüber dem isotropen Strahler aufweist, gilt folgende Beziehung:

$$g_d = 10 \cdot \log\left(\frac{a_d}{a_i}\right) = 10 \cdot \log(1.64) = 2.15 \text{ dB}$$

d.h. Gewinnangaben die sich auf den isotropen Strahler beziehen sind um 2.15 dB größer.

DL9NAM

Anwendung: Antennen (2)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Um den Gewinn einer einzelnen Antenne zu erhöhen, werden mehrere gleiche zu einen Antennensystem (Array) zusammengefasst. Eine gewinnoptimierte Anordnung erhält man, wenn sich die (rechnerischen) Antennenwirkflächen berühren. Unter Vernachlässigung von Verlusten steigt bei n gekoppelten Antennen der Gewinn um

$$g_n = 10 \cdot \log(n)$$

Der Gewinn einer Einzelantenne gegenüber dem isotropen Strahler ist mit der Wirkfläche A bzw. dem horizontalen und vertikalen Öffnungswinkel über folgenden Ausdruck verknüpft:

$$a_i = \frac{4\pi \cdot A}{\lambda^2} \approx \frac{44347}{\Delta\vartheta \cdot \Delta\varphi} \quad \text{bzw.} \quad g_i = 10 \cdot \log(a_i) \text{ in dBi}$$

Der Gesamtgewinn eines Antennenarrays mit n Einzelantennen ist dann

$$g_{toti} = g_i + g_n \quad \text{in dBi oder}$$

$$g_{totd} = g_i + g_n - 2.15 \quad \text{in dBd}$$

DL9NAM

Anwendung: Rauschen (1)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Das Verhältnis von Signal- zu Rauschleistung wird SNR (Signal to Noise Ratio) genannt:

$$SNR = \frac{P_S}{P_N} \quad \text{bzw.} \quad SNR' = 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{P_N}\right) \text{ in dB.}$$

Bei thermischem Rauschen ist P_N die Leistung, die bei Anpassung an einen nicht rauschenden Widerstand abgegeben wird:

$$P_N = kT_0 \cdot B$$

Mit $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmann-Konstante), T_0 die absolute Temperatur (in °K) und B die Messbandbreite (Hz).

Da sowohl aktive als auch passive Systeme rauschen, definiert man die Rauschzahl F als Eigenschaft dieses Systems mit der Verstärkung bzw. Dämpfung g:

$$F = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{P_{Sin}}{P_{Nin}} \cdot \frac{P_{Nout}}{g \cdot P_{Sin}} = \frac{1}{g} \cdot \frac{P_{Nout}}{P_{Nin}}$$

Die Ausgangsrauschleistung P_{Nout} enthält dabei die um g verstärkte Rauschleistung am Eingang und einen vom System beigetragenen Anteil:

$$P_{Nout} = g \cdot P_{Nin} + P_{N\text{int}}$$

DL9NAM

Anwendung: Rauschen (2)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Die Gesamtrauschzahl errechnet sich dann zu

$$F = \frac{g \cdot P_{Nin} + P_{N\,int}}{g \cdot P_{Nin}} = 1 + \frac{P_{N\,int}}{g \cdot P_{Nin}}$$

und es wird der rechte Teil der Summe als Zusatzrauschzahl bezeichnet, wobei diese sich als Verhältnis des auf den Eingang bezogenen zusätzlichen Rauschanteils zur eingangsseitigen Rauschleistung errechnet.

Gibt man die Gesamtrauschzahl in dB an, so ist

$$F' = 10 \cdot \log(SNR_{in}) - 10 \cdot \log(SNR_{out}) = 10 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{g} \cdot \frac{P_{N\,int}}{P_{Nin}}\right)$$

und man erkennt, dass stets $F' > 0$ sein muss.

Beispiel:
Ein Empfänger mit der Rauschzahl F_3 soll durch einen Vorverstärker mit der Rauschzahl F_1 und der Verstärkung g verbessert werden. Die Antenne wird über ein Kabel mit der Dämpfung d angeschlossen. Wie groß ist die Gesamtrauschzahl des Systems, wenn
a.) der Verstärker direkt am Empfänger und
b.) direkt an der Antenne angeschlossen wird?

DL9NAM

Anwendung: Rauschen (3)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Ein passives Kabel mit der Dämpfung d < 1 bzw. $d' = 10 \cdot \log(d)$ < 0 hat in guter Näherung die Rauschzahl $F_2 = 1/d$ bzw. $F_2' = -d'$.
Schaltet man vor ein System mit der Rauschzahl F einen rauschenden Vierpol mit der Verstärkung G und der eigenen Rauschzahl F_1, so erhält man die Gesamtrauschzahl zu

$$\boxed{F_{ges} = F_1 + \frac{F-1}{G}}$$

Auf das Beispiel angewendet wird mit
g = 20 dB (100), F_1 = 1.5 dB (1.41), F_3 = 8 dB (6.31), d = -5 dB (0.316):

a.) Vorverstärker direkt am Empfänger	b.) Vorverstärker direkt an der Antenne
$F_e = F_1 + \frac{F_3 - 1}{g}$ **= 1.66 dB**	$F_e = F_2 + \frac{F_3 - 1}{d} = \frac{1}{d}(1 + F_3 - 1) = F_2 \cdot F_3$ **= 13 dB**
$F_{ges} = F_2 + \frac{F_e - 1}{d} = \frac{1}{d}(1 + F_e - 1)$ $= F_2 \cdot F_e = F_2 \cdot \left(F_1 + \frac{F_3 - 1}{g}\right)$ **= 6.66 dB**	$F_{ges} = F_1 + \frac{F_e - 1}{g} = F_1 + \frac{F_2 \cdot F_3 - 1}{g}$ **= 2.05 dB** → **b. ist die bessere Lösung!**

DL9NAM

Amateurfunkprüfung (1)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

Im Fragenkatalog stehen u.a. folgende Fragen:
TA107: Ein Spannungsverhältnis von 15 entspricht wieviel dB? **23.5 dB**
TA108: Einer Leistungsverstärkung von 40 entspricht wieviel dB? **16 dB**
TA110: Welcher Feldstärke entspricht 120 dBµV/m? **1V/m**
TA112: Ein Sender mit 1 W Ausgangsleistung wird an eine Endstufe mit der Verstärkung von 10 dB angeschlossen. Wieviel dBm entsprechen dann dem Ausgangssignal? **40 dBm**
TB708: Wie verändert sich die Rauschleistung, wenn von einem Quarzfilter mit 2.5 kHz Bandbreite auf eines mit 0.5 kHz und gleicher Dämpfung und Flankensteilheit umgeschaltet wird? **7 dB geringer**
TB920: Ein Sender mit 100 W Ausgangsleistung wird mit optimaler Anpassung über ein Kabel mit der Antenne verbunden. Dort kommen nur noch 50 W an. Wie groß ist die Kabeldämpfung? **3 dB**
TD418: Ein HF Verstärker hat eine Verstärkung von 16 dB. Wie groß ist bei einer Eingangsleistung von 1 W die Ausgangsleistung? **40 W**
TF441: Welchen Einfluss hat ein UHF Vorverstärker mit einer Rauschzahl von F = 2 auf das SNR an seinem Ausgang? **Es ist um 3 dB schlechter.**
TH148: Bei einer Yagi Antenne wird in Hauptstrahlrichtung eine ERP von 15 W und in die Gegenrichtung 0.6 W gemessen. Wie groß ist das Vor-Rück-Verhältnis? **14 dB**

DL9NAM

Bild 17 / 12.05.09 / DL9NAM

Amateurfunkprüfung (2)

Deutscher Amateur-Radio-Club e.V.

TA107: $d = 20 \cdot \log(15) = 23.5$ dB

TA108: $d = 10 \cdot \log(40) = 10 \cdot (\log(10) + \log(4)) = 16$

TA110: $a = 10^{120/20} = 10^6 = 1000000\,\mu V/m = 1V/m$

TB708: mit $P_N = kT_0 \cdot B$ wird $\frac{P_{0.5}}{P_{2.5}} = \frac{kT_0 \cdot 0.5}{kT_0 \cdot 2.5} = \frac{1}{5}$ und damit $d = 10 \cdot (\log(2) - \log(10)) = -7$ dB

TB920: $d = 10 \cdot (\log(100/2) - \log(100)) = 10 \cdot \log(1/2) = -3$dB

TD418: $d = 10^{16/10} = 10^1 \cdot 10^{0.6} = 10 \cdot 10^{2 \cdot 0.3} = 10 \cdot 4 = 40$

TF441: aus $F = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}}$ wird $SNR_{out} = \frac{SNR_{in}}{F}$ d.h. $d = 10 \cdot \log(1/2) = -3$dB

TH148: $d = 10 \cdot \log\left(\frac{15}{0.6}\right) = 10 \cdot \log(25) = 10 \cdot (\log(100) - \log(4)) = 14$dB

DL9NAM

Bild 18 / 12.05.09 / DL9NAM