

Digitale Filter: Vom Pol- Nullstellendiagramm zum Filter

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort.....	2
2. Digitale Filter – wozu?.....	2
3. Was hier gezeigt werden soll.....	3
4. Der Aufbau eines digitalen Filters.....	3
5. Die Beschreibung eines Filters.....	5
5.1 Frequenz- und Phasengang.....	5
5.2 Die mathematische Beschreibung eines Filters.....	5
5.2.1 Komplexe Zahlen.....	5
5.2.2 Die allgemeine Filterbeschreibung in Produktform.....	6
5.3 Das Pol- Nullstellendiagramm.....	8
5.3.1 Die Wirkung von Polen.....	10
5.3.2 Die Wirkung von Nullstellen.....	11
5.4 Der Weg vom Pol-Nullstellendiagramm zum Filter.....	12
5.4.1 Struktur eines digitalen Filters.....	12
5.4.2 Die Berechnung der Koeffizienten.....	13
6. Was nur digitale Filter können.....	15
Literaturverzeichnis:.....	18

1. Vorwort

Vor vielen Jahren hatte ich einen Vortrag zum selben Thema gehalten. Die in dem Vortrag (unvermeidlichen) Formeln hatte ich damals vermutlich nicht ausreichend erklärt und deshalb den Eindruck gewonnen, dass der Vortrag für die Zuhörer schwer verständlich war. Mit den jetzigen Vortrag möchte ich den Versuch, die Zusammenhänge den Zuhörern näher zu bringen nochmals wagen. Um die Zusammenhänge besser greifbar zu machen habe ich kein kleines Programm in Tcl/Tk geschrieben mit dessen Hilfe die Aussagen der Formeln grafisch sichtbar gemacht werden können.

2. Digitale Filter – wozu?

Um die Frage zu beantworten wozu man digitale Filter überhaupt braucht, sollen hier die Eigenschaften von analogen und digitalen Filtern verglichen werden. Bei den analogen Filtern sollen hier keine aktiven Filter betrachtet werden.

	Analoges Filter	Digitales Filter
Frequenzbereich	mHz bis mehrere 100 GHz	mHz bis mehrere 100 MHz
Dynamikbereich	groß	Vom Zahlenformat abhängig
Genauigkeit	Von Bauteiletoleranzen	Vom Zahlenformat abhängig

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

	abhängig	
Langzeitstabilität	Von den Bauteilen abhängig	Von Bauteilen unabhängig
Änderbarkeit	Nur bedingt änderbar	Ohne Hardwareänderungen beliebig änderbar
Frequenzgang	Nicht periodisch	periodisch
Lineare Phase	Nicht möglich	Möglich

Während die ersten vier Punkte recht offensichtlich sind, sollen die letzten drei im Laufe des Vortrags noch genauer untersucht werden. Zusammenfassend lässt sich an dieser Stelle sagen, dass es die Unabhängigkeit von Bauteiltoleranzen erlaubt, Filter zu bauen, die keinen Abgleich brauchen – weder während der Produktion noch später im Betrieb. Die leichte Änderbarkeit des Filterverhaltens ohne die Hardware ändern zu müssen eröffnet zudem ein riesiges Feld von Anwendungen die sich rein analog kaum realisieren lassen (wie z.B. automatisch nachlaufende Notchfilter). Dadurch dass es inzwischen Hardware gibt mit der man weit in den dreistelligen MHz-Bereich eindringen kann können digitale Filter inzwischen an allen Stellen in Funkempfängern oder Funksendern eingesetzt werden.

3. Was hier gezeigt werden soll

Um von der Definition der Anforderungen an ein Filter bis zum fertigen Filter zu kommen sind zwei Schritte notwendig:

- Aus gefordertem Frequenz- und Phasengang eine Gleichung zu ermitteln, die das gewünschte Filterverhalten beschreibt
- Aus der Filtergleichung eine geeignete Filterstruktur ermitteln und die zugehörigen Filterkoeffizienten berechnen.

Nachdem der erste Teil verglichen mit dem zweiten mathematisch noch um einige Größenordnungen anspruchsvoller ist, wollen wir uns hier nur auf den zweiten Teil beschränken. Dieser Teil hat außerdem den Vorteil, dass sich die Vorgänge grafisch sehr gut darstellen lassen.

4. Der Aufbau eines digitalen Filters

Bevor über die Dimensionierung digitaler Filter gesprochen wird, soll hier der Aufbau eines solchen Filters gezeigt werden. Dabei wird ein Filterverhalten sichtbar werden, das für alle digitalen Filter typisch ist und das sich aber mit digitalen Mitteln leider nicht vermeiden lässt: Der periodische Frequenzgang.

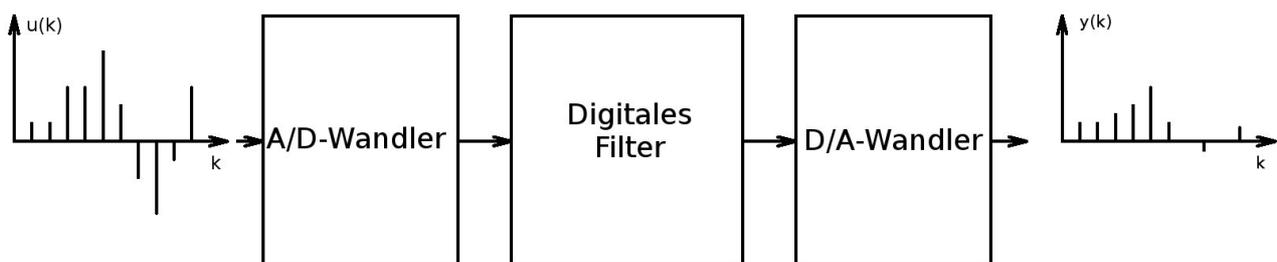


Bild 1: Der Aufbau eines digitalen Filters

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Im linken Block – dem Analog/Digitalwandler wird das Analogsignal mit einer konstanten Frequenz – der Abtastfrequenz f_0 - abgetastet. Die zu den Abtastzeitpunkten gemessenen Spannungswerte werden als Zahlenstrom in einem weiteren Block (dem digitalen Filter) in einen anderen Zahlenstrom umgerechnet der dann zu einem Digital/Analogwandler geschickt wird. Als Ergebnis erhält man ein treppenförmiges Ausgangssignal das nach einem analogen Tiefpass (hier nicht gezeigt) das gefilterte Signal erzeugt. In vielen Fällen wird das digital gefilterte Signal direkt digital weiterverarbeitet - der D/A-Wandler entfällt bei solchen Anwendungen. Das Ganze funktioniert sehr gut solange die Abtastfrequenz weit über der Frequenz des abzutastenden Signals liegt (Bild 2).

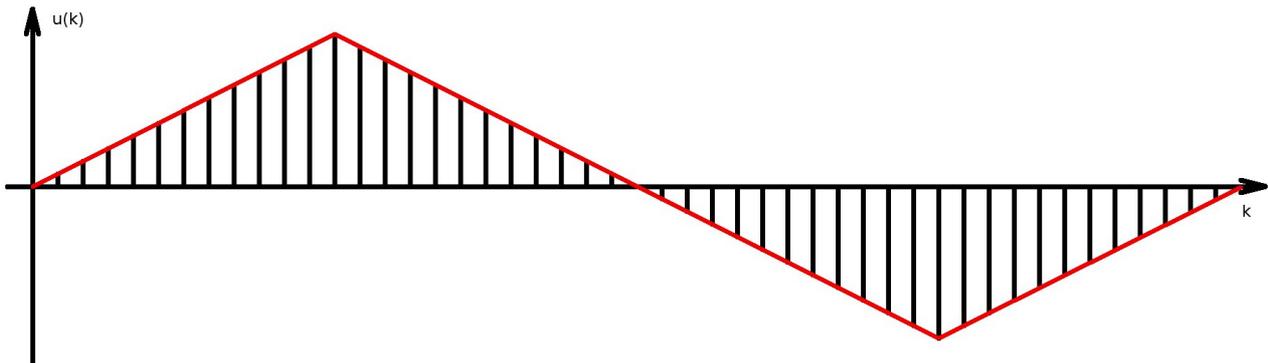


Bild 2: Ein niederfrequentes Signal wird mit einer hohen Frequenz abgetastet $f \ll f_0$. Der Signalverlauf lässt sich damit sehr gut abbilden.

Was passiert wenn das nicht so ist, lässt ich am leichtesten zeigen, wenn man versucht ein Sinussignal oder wie im nächsten Bild ein Dreiecksignal von 99kHz mit 100kHz abzutasten. (Bild 3).

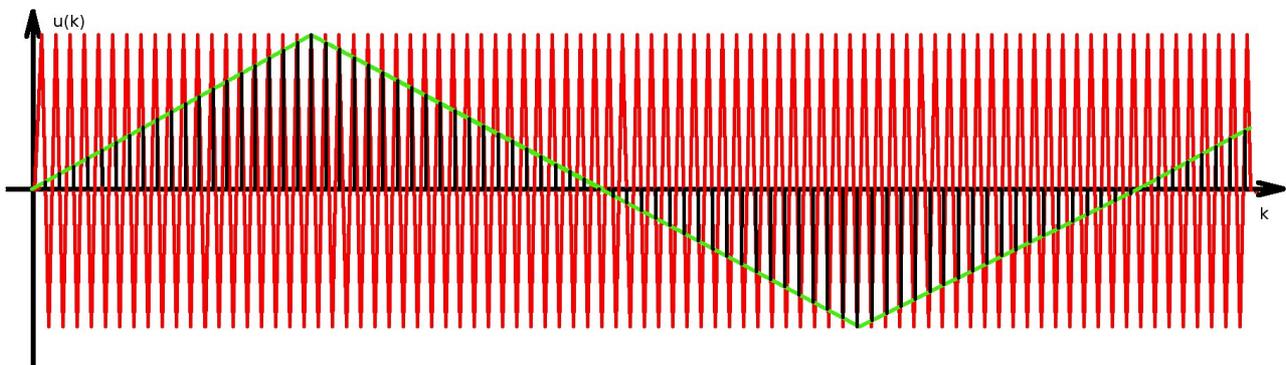


Bild 3: Abzutastendes Signal (rot) und die Abtastfrequenz (schwarz) liegen nahe beieinander. Die Abtastwerte geben das ursprüngliche Signal nicht wieder (grün)

Das Ergebnis ist eine Zahlenfolge, die einem 1kHz – Signal entspricht. Das Filter kann also nicht mehr erkennen, ob das Originalsignal 1 kHz oder 99 kHz hat. Dieses Verhalten wiederholt sich mit jedem Vielfachen der Abtastfrequenz. Genau genommen sogar mit der halben Abtastfrequenz. Der Frequenzgang eines digitalen Filters ist damit periodisch: Zwischen der halben und der vollen Abtastfrequenz ist der Frequenzgang gespiegelt, das Ganze wiederholt sich mit jedem Vielfachen der Abtastfrequenz. Leider gibt es keine Möglichkeit das Problem mit digitalen Methoden zu lösen. Ein digitales Filter funktioniert deshalb nur wenn ihm ein bandbegrenztetes Signal angeboten wird dessen Frequenzanteile alle unter der halben Abtastfrequenz liegen.

5. Die Beschreibung eines Filters

5.1 Frequenz- und Phasengang

Jeder von uns kennt die übliche Darstellung eines Filterverhaltens mit Hilfe des Frequenzganges. Dazu wird in einem Diagramm die Filterverstärkung/Filterdämpfung über der Frequenz aufgetragen. Mit Hilfe solcher Diagramme lässt sich das Filterverhalten auf einen Blick erkennen und einfach in die Kategorie Tiefpass, Hochpass oder Bandpass einsortieren. Auch Parameter wie Bandbreite, Flankensteilheit, Sperr- oder Durchlassdämpfung lassen sich gut ablesen. Genau genommen ist das aber nur die halbe Wahrheit. Neben dem Amplitudengang gibt es noch den Phasengang in dem dargestellt wird wie sich die Phasenlage eines sinusförmigen Signals beim Durchlauf durch das Filter verschiebt. Für den Betrieb in „normalen“ Empfängern oder Sendern bei denen es um die Übertragung von Audiosignalen (Sprache oder Musik) geht ist dieser Phasengang uninteressant weil wir in unserem Ohr kein Organ haben, das solche Phasenverschiebungen erkennen kann. Das ist wohl auch der Hauptgrund warum Phasengänge so gut wie nie dargestellt werden. Starke Phasensprünge (sie treten meist an den Filterflanken auf) führen zu starken Verzerrungen von Signalformen was bei digitalen Übertragungsverfahren dazu führen kann dass sich die ursprüngliche Information nicht mehr dekodieren lässt – eine Verzerrung, die wir mit unserem Ohr nicht wahrnehmen können.

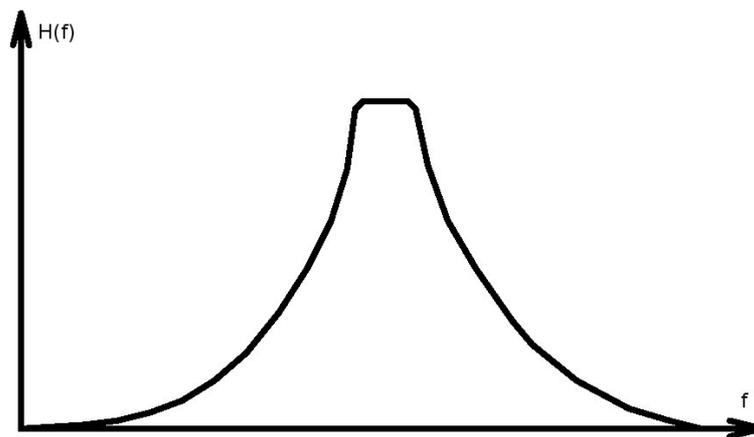


Bild 4: Beispiel für die Darstellung eines Bandpasses

5.2 Die mathematische Beschreibung eines Filters

So eingängig diese Art der Darstellung auch sein mag – für die Synthese eines Filter reicht sie nicht aus. Dazu braucht es eine genauere - eine mathematisch exakte Darstellung. Mathematiker stellen Zusammenhänge gerne möglichst kompakt und allgemeingültig dar. Um Phasengang und Amplitudengang in einer Formel gemeinsam beschreiben zu können werden dafür gerne komplexe Zahlen verwendet weil sie beides in einer Zahl vereinen.

5.2.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen bestehen aus zwei von einander unabhängigen Komponenten – dem Realteil und dem Imaginärteil. Will man eine komplexe Zahl graphisch darstellen, so geht das in einer Ebene die durch zwei Achsen aufgespannt wird – der realen und der imaginären Achse. In dem hier gezeigten

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Beispiel wird die Zahl $4 + j3$ dargestellt. Verbindet man den Koordinatenursprung mit dem Punkt $4 + j3$, erhält man eine Linie der Länge 5 (dem sogenannten Betrag und einem Winkel von $\text{atan}(3/4) = 36,9$ Grad. Wie man hier erkennen kann, lässt sich eine komplexe Zahl durch einen Punkt in der komplexen Ebene darstellen und entweder durch Real- und Imaginärteil beschreiben oder durch Betrag und Phase. Das ist genau das was man zur Beschreibung eines Filters braucht.

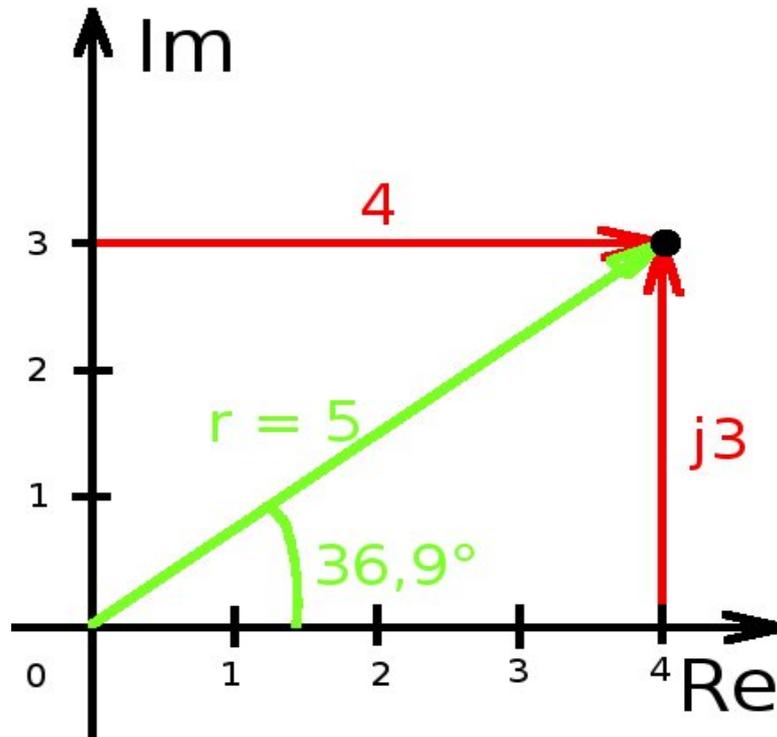


Bild 5: Die Darstellung einer komplexen Zahl (schwarzer Punkt) in kartesischen Koordinaten (rot) und polaren Koordinaten (grün).

Die Mathematiker haben für die Darstellung komplexer Zahlen zum einen die kartesische Darstellung $a + jb$ zum anderen die polare Darstellung die häufig in der etwas gewöhnungsbedürftigen Form $r * e^{j\phi}$ geschrieben wird. In unseren Beispiel wäre das also $5 * e^{j36,9^\circ}$.

5.2.2 Die allgemeine Filterbeschreibung in Produktform

Die allgemeine Beschreibung eines digitalen Filters sieht damit so aus:

$$H(z) = \frac{\prod_{u=0}^M (z - z_{0,u})}{\prod_{v=0}^N (z - z_{\infty,v})} \quad \text{mit} \quad z = e^{j2\pi \frac{f}{f_0}} \quad \text{und} \quad N \geq M$$

Zugegeben – diese Gleichung sieht auf den ersten Blick sehr verwirrend aus. Um dem Ding den Schrecken zu nehmen sollen die Teile hier einzeln erklärt werden. Außerdem gibt es zu dieser

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Formel ein grafisches Gegenstück – das Pol- Nullstellendiagramm in dem sich die Vorgänge bildlich darstellen lassen. Zuerst aber zu der Formel:

H: Ist eine komplexe Zahl deren Betrag die Filterverstärkung und deren Winkel die Phasenlage bei einer bestimmten Frequenz anzeigt.

z: Auf den ersten Blick ist es etwas verblüffend, weil man ja eigentlich ein $H(f)$ haben möchte, also Filterverstärkung und Phasenlage abhängig von der Frequenz, die Frequenz hier aber nicht direkt auftaucht sondern in einem eher verwirrenden Konstrukt:

$$z = e^{j2\pi \frac{f}{f_0}}$$

Wie oben schon beschrieben ist das die polare Darstellung eines Punktes auf einem Kreis mit Radius 1 in der komplexen Ebene wobei der Frequenzbereich von 0 bis zur Abtastfrequenz linear auf diesem Kreis abgetragen wird. In dem hier gezeigten Beispiel ist der Punkt (rot) zu sehen der 25 kHz entspricht bei einer Abtastfrequenz von 400kHz.

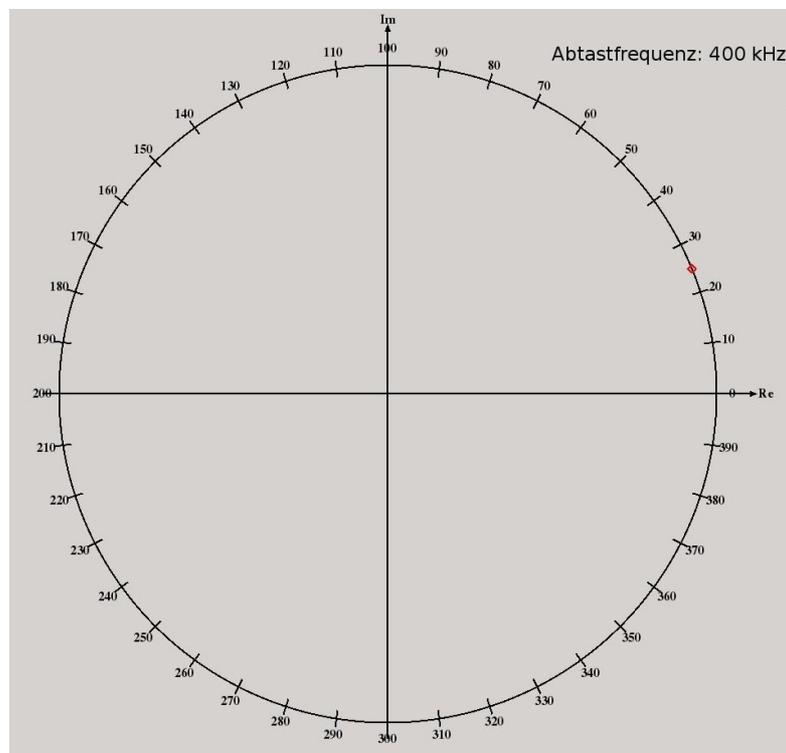


Bild 6: Darstellung des „Frequenzpunktes“ (rot) der bei einer Abtastfrequenz von 400 kHz eine Frequenz von 25kHz darstellt.

Bevor wir uns die rechte Seite der Gleichung genauer ansehen soll sie so abgeändert werden dass nur noch der Amplitudengang – also der Betrag von H beschrieben wird. Die Mathematiker kennzeichnen Beträge von Zahlen durch zwei senkrechte Striche. In unserer Formel interessieren wir uns deshalb für $|H(z)|$ also dem Betrag. Die Formel für den Amplitudengang – also ohne Phaseninformation sieht damit so aus:

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

$$|H(z)| = \frac{\prod_{\mu=0}^M |(z - z_{0\mu})|}{\prod_{v=0}^N |(z - z_{\infty v})|} \quad \text{mit } z = e^{j2\pi \frac{f}{f_0}} \quad \text{und } N \geq M$$

Obwohl diese Gleichung jetzt noch ein Stückchen komplizierter aussieht als ohne die Betragszeichen hat sie sich im Gebrauch doch vereinfacht: $|(z - z_{0\mu})|$ ist der geometrische Abstand des Frequenzpunktes (den wir schon kennen) zu einem beliebig wählbaren Punkt in der komplexen Ebene – einer sogenannten Nullstelle. Ebenso ist $|(z - z_{\infty v})|$ der geometrische Abstand unseres Frequenzpunktes zu einem in der komplexen Ebene frei wählbaren Punkt – einem sogenannten Pol. Das Zeichen \prod steht für „Produkt“. Man muss also alle Abstände zwischen Frequenzpunkt und Nullstellen miteinander multiplizieren und durch das Produkt der Abstände zu den Polen dividieren. Das Ergebnis ist die Verstärkung des Filters für den gewählten Frequenzpunkt. Die Lage der Pole und Nullstellen bestimmt also das Filterverhalten. Wie man diese „frei wählbaren“ Pole und Nullstellen bestimmt kann man im nächsten Punkt sehen.

5.3 Das Pol- Nullstellendiagramm

Das Pol- Nullstellendiagramm ist das graphische Gegenstück zu der oben gezeigten Gleichung. Es besteht aus einem Koordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse und einem Kreis mit dem Radius 1. Möchte man mit diesem Diagramm ein Filter definieren, muss man in diese komplexe Ebene die Pole (Kreuzchen) und Nullstellen geeignet „hineinstreuen“. Dazu muss man allerdings drei Regeln beachten:

- Die Anzahl von Nullstellen darf nicht größer sein als die Zahl der Pole. (Mehr Nullstellen als Pole würden ein Filter beschreiben, das Vorhersagen treffen kann – sowas gibt es leider nicht).
- Die Pole müssen alle innerhalb des Einheitskreises liegen. Pole auf dem Kreis oder gar außerhalb würden zu einem instabilen Filter führen – das Filter würde wild schwingen.
- Für jeden Pol oder jede Nullstellen die nicht auf der reellen Achse liegt muss es ein Gegenstück spiegelsymmetrisch zu dieser Achse geben. Ist das nicht der Fall lässt sich daraus überhaupt kein Filter bauen.

Im Bild 7 ist ein gültiges Pol-Nullstellendiagramm gezeigt wobei es in dem Beispiel nur darum geht die oben beschriebenen Regeln zu demonstrieren. Die hier gezeigte Verteilung von Pol- und Nullstellen wird wohl keinen sinnvollen Filterbetrieb ermöglichen.

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

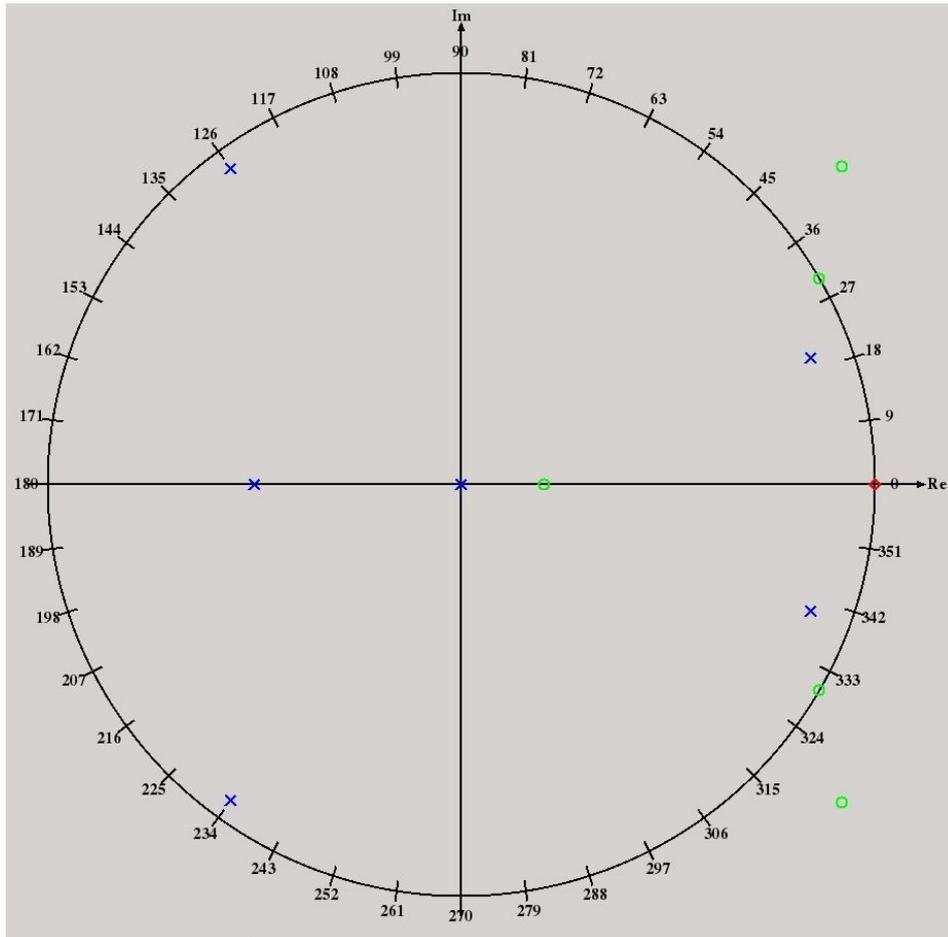


Bild 7: Beispiel für ein gültiges Pol- Nullstellendiagramm mit 6 Polen (blau), 5 Nullstellen (grün), einer Abtastfrequenz von 360 kHz und einem Frequenzpunkt bei 0 Hz (rot)

5.3.1 Die Wirkung von Polen

Im ersten Beispiel soll genau ein Pol im Ursprung der komplexen Ebene liegen. Der Abstand zum Frequenzpunkt (der sich ja auf dem Kreis mit Radius 1 bewegt) ist dann für alle Frequenzen „1“. Die Filterverstärkung ist damit für alle Frequenzen $1/1=1$. Was man hier gebaut hat, ist also kein brauchbares Filter.

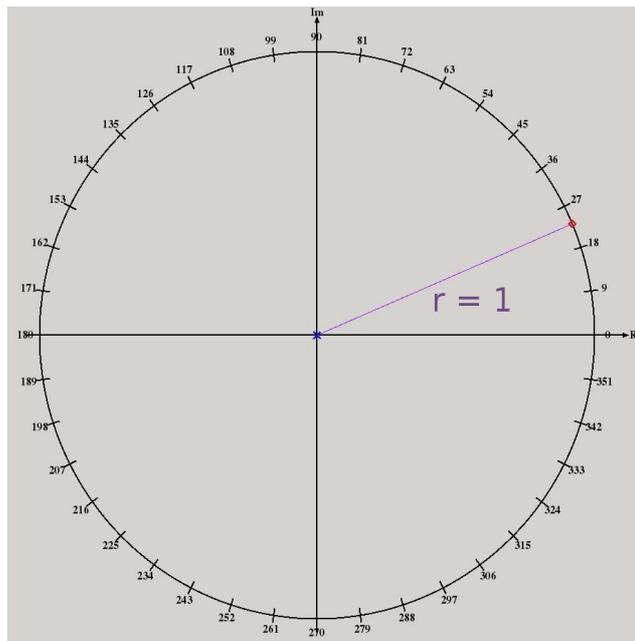


Bild 8: „Filter“ mit einem Pol im Ursprung: Verstärkung 1 für alle Frequenzen

Schiebt man diesen Pol auf der reellen Achse nach links (z.B. nach -0,9), dann sieht die Welt anders aus. Bei der Frequenz 0 ist der Abstand zum Pol 1,9, die Filterverstärkung damit $1/1,9 = 0,5363...$ Bei der halben Abtastfrequenz ist der Abstand zwischen dem Frequenzpunkt und dem Pol 0,1 – die Filterverstärkung ist damit $1/0,1 = 10$.

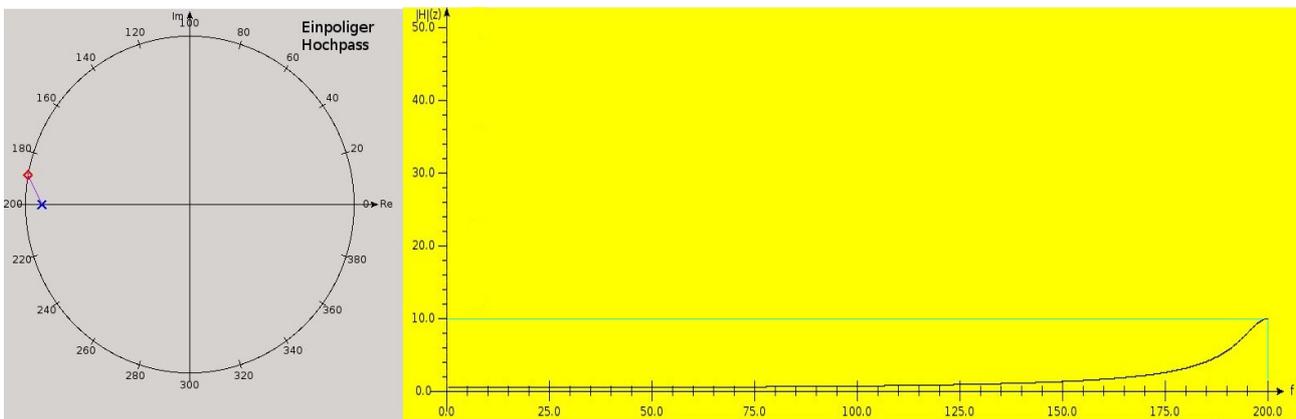


Bild9: Einpoliger Hochpass. Abtastfrequenz: 400kHz, Verstärkung bei 200kHz: 10

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Schiebt man den Pol noch weiter an den Einheitskreis, steigt die Verstärkung bei der halben Abtastfrequenz weiter an. Man kann statt dessen auch mehrere Pole an der Stelle -0.9 übereinanderlegen. Damit multiplizieren sich die Längen. Bei zwei Polen übereinander wäre die Verstärkung damit $1/(0.1 * 0.1) = 100$.

Schiebt man den Pol nach rechts, erhält man entsprechend einen Tiefpass.

Um einen Bandpass zu erhalten muss man einen Pol bei der gewünschten Frequenz nahe an den Einheitskreis legen. Natürlich darf man das spiegelsymmetrische Gegenstück nicht vergessen. Liegt der Frequenzpunkt dem Pol genau gegenüber ist in diesem Fall einer der beiden Abstände sehr klein, das Produkt wird damit ebenfalls sehr klein was bei der gewünschten Frequenz zu einer hohen Filterverstärkung führt. Das zugehörige Filter verhält sich so wie ein einfacher Schwingkreis. Stößt man ein solches Filter mit einem Impuls an, reagiert es wie das analoge Gegenstück mit einer gedämpften Sinusschwingung die umso langsamer abklingt je näher der Pol am Einheitskreis liegt.

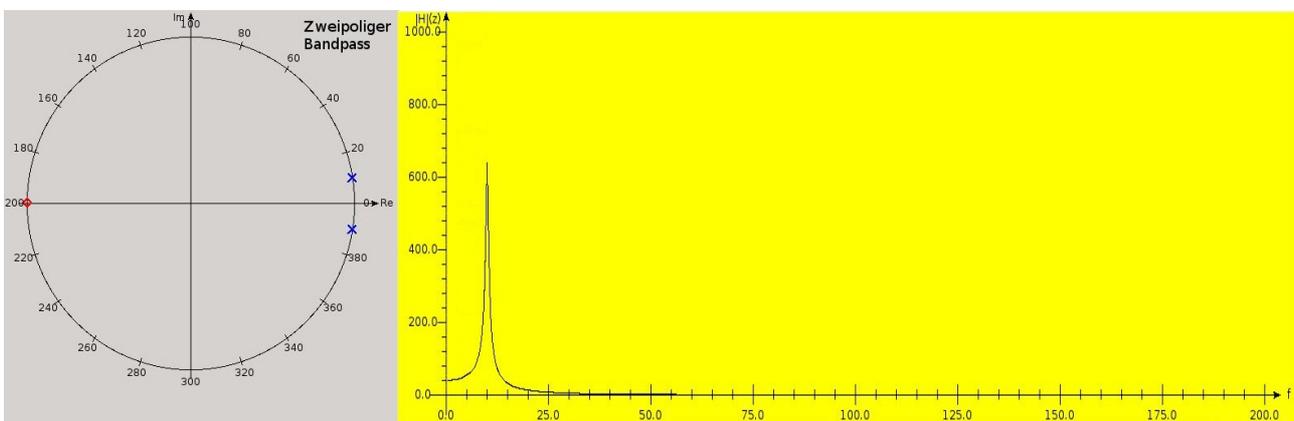


Bild 10: Zweipoliger Bandpass. Abtastfrequenz: 400kHz, Verstärkungmaximum bei 10kHz

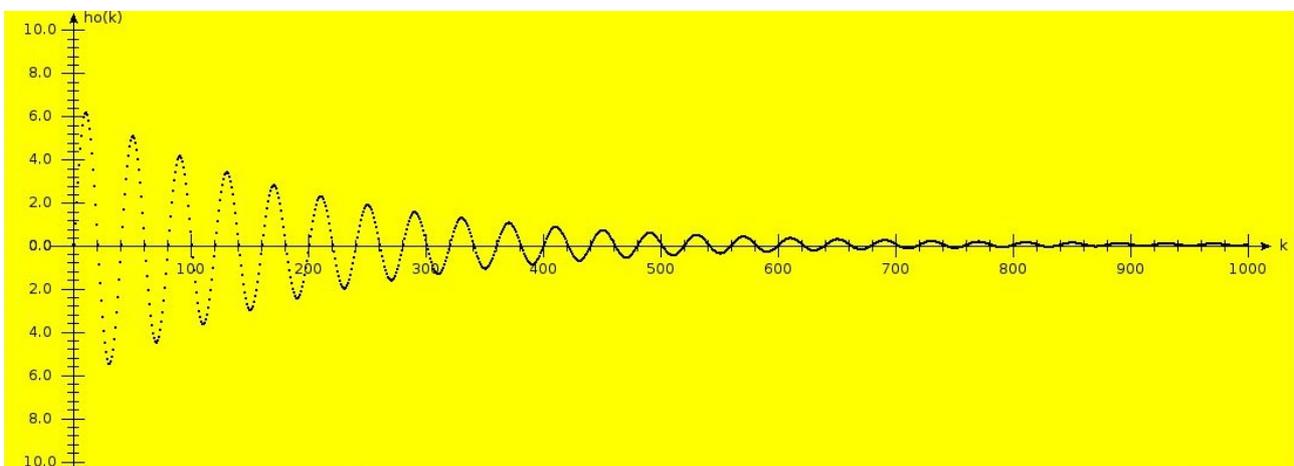


Bild11: Reaktion des zweipoligen Bandpasses aus Bild 10 auf einen einzelnen Impuls

Mit mehr als zwei Polen lassen sich beliebige mehrpolige Filter aufbauen.

5.3.2 Die Wirkung von Nullstellen

Nullstellen stehen in der Gleichung im Zähler, haben also im Gegensatz zu Pol keine verstärkende sondern eine dämpfende Wirkung. Liegt eine Nullstelle bei einer bestimmten Frequenz auf dem Einheitskreis, dann hat das Filter an dieser Stelle die Verstärkung 0. Möchte Filter mit mehreren

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Nullstellen bauen muss man mindestens so viele Pole im Diagramm platzieren wie Nullstellen vorhanden sind. Möchte man nicht, dass sich diese Pole im Frequenzgang auswirken, legt man sie am besten in den Ursprung. Hier ein Beispiel eines Notchfilters mit einer Nullstelle, dem dazu symmetrischen Gegenstück und zwei Polen im Koordinatenursprung.

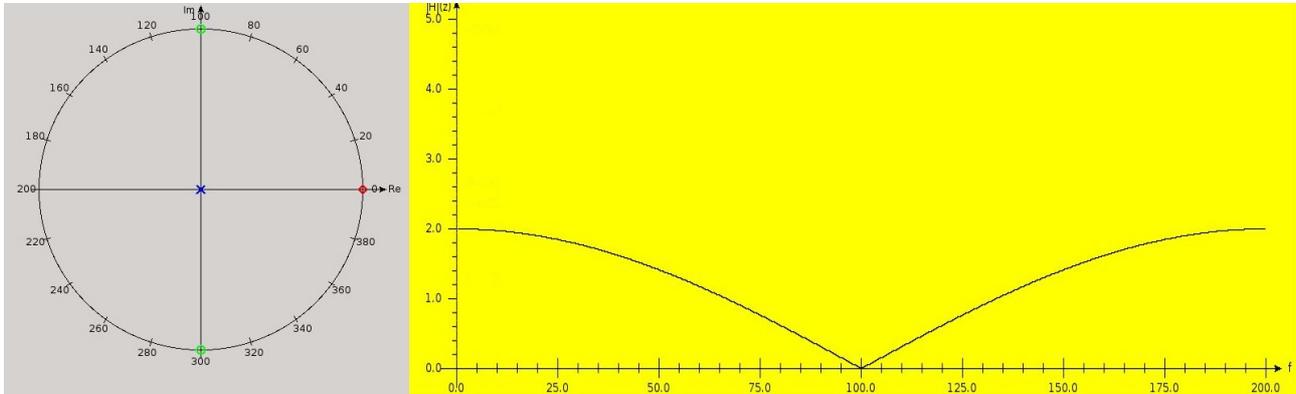


Bild 12: Beispiel eines zweipoligen Notchfilters

5.4 Der Weg vom Pol-Nullstellendiagramm zum Filter

Bisher haben wir „nur“ ein Diagramm gesehen in dem sich mit Polen und Nullstellen ein beliebiges Filter definieren lässt. Wie man zum Filter selbst kommt ist aus dem Diagramm und damit der zugehörigen Filtergleichung nicht zu erkennen. Bevor der Weg nun beschrieben wird, vorher eine Beschreibung wie die „Struktur“ eines digitalen Filters aussieht

5.4.1 Struktur eines digitalen Filters

Strukturen für ein solches Filter gibt es eine ganze Reihe. Eine dieser Strukturen hat den Vorteil, dass sich deren Koeffizienten (siehe unten) besonders einfach berechnen lassen. Genau diese Struktur soll hier vorgestellt werden:

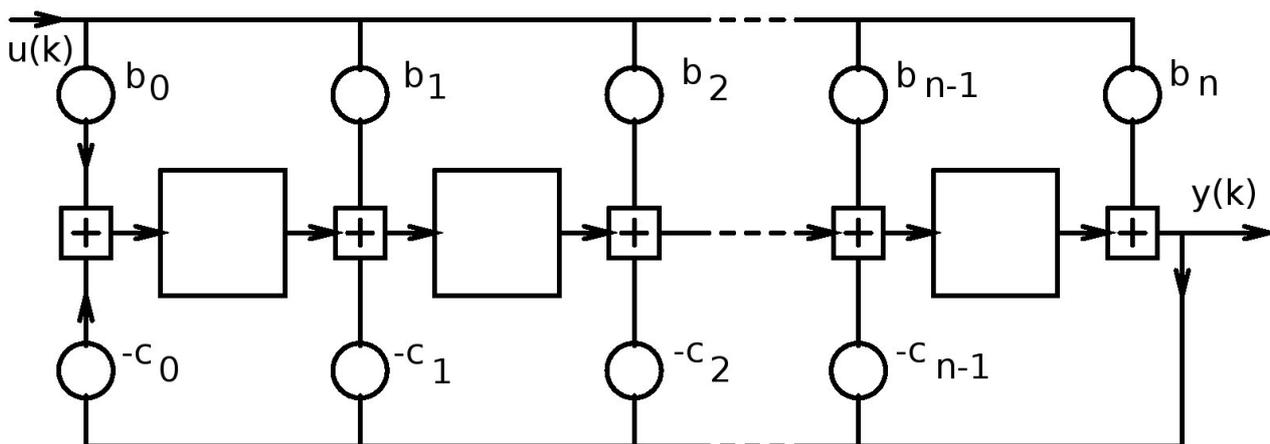


Bild 13: Eine mögliche Struktur eines digitalen Filters

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Ein digitales Filter besteht aus drei unterschiedlichen Komponenten:

- Speichern, die sich einen Wert eine Taktzeit lang merken (In der Zeichnung die leeren Kästchen)
- Multiplizieren die jeweils einen Wert mit einem konstanten Wert (einem Koeffizienten) multiplizieren (in der Zeichnung die Kreise)
- Addieren, die die an mehreren Eingängen anstehenden Werte addieren (in der Zeichnung die Kästchen mit den Pluszeichen).

Die hier gezeigte Filterstruktur gibt den Weg vor in dem das Endergebnis zu berechnen ist. Als Anfangszustand wird davon ausgegangen, dass alle Speicherzellen den Wert 0 haben (im analogen Gegenstück würde das z.B. entladene Kondensatoren und stromlosen Spulen entsprechen). Dann werden von rechts beginnend Speicherwert und der mit einem Faktor multiplizierte Eingangswert zusammengezählt und als Filterergebnis weitergegeben. Dieses Ergebnis wird mit den c-Koeffizienten multipliziert, zu den mit den mit den b-Koeffizienten gewichteten Eingangssignalen und dem Inhalt des jeweils linken Speichers addiert und in den rechten Speicher geschrieben. Ist das linke Ende der Kette erreicht, beginnt der nächste Rechenzyklus wieder von rechts. Das Filterverhalten dieser Struktur wird ausschließlich durch die unterschiedlichen Koeffizienten bestimmt.

5.4.2 Die Berechnung der Koeffizienten

Wenngleich die zugehörige Formel wieder recht komplex aussieht, ist die Berechnung der Koeffizienten sehr einfach. Man muss die Ausdrücke in den Klammern einfach ausmultiplizieren und kommt damit zu einem Term der aus allen möglichen Potenzen von z besteht die jeweils mit einem Faktor versehen sind. Diese Faktoren sind unsere gesuchten Koeffizienten. Hier ein Beispiel:

$(z+2)(z+1)=z^2+3z+2$ In diesem Beispiel wären die Koeffizienten $b_2=1$, $b_1=3$ und $b_0=2$.

In voller Schönheit sieht die Umwandlung der Produktform unserer Filtergleichung in eine Summenform dann so aus:

$$\frac{\prod_{\mu=0}^M (z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=0}^N (z - z_{\infty\nu})} = \frac{\sum_{\mu=0}^{M+1} b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^{N+1} c_{\nu} z^{\nu}}$$

Setzt man die beim ausmultiplizieren entstandenen Koeffizienten in unsere Filterstruktur ein, erhält man genau das Filterverhalten, das das Pol- Nullstellendiagramm erwarten lässt. Vielleicht noch ein kleines Beispiel: Unser erster Hochpass hatte einen Pol bei -0,9. Aus $(z - z_{\infty 0})$ wird damit $(z - (-0,9)) = z + 0,9$. Bei dem einfachen Beispiel gibt es nichts auszumultiplizieren, die Koeffizienten sind also $c_1=1$ und $c_0=0,9$. Nachdem es in diesem Beispiel auch keine Nullstellen gibt, setzt man $b_0=1$ und alle mögliche höheren Potenzen gleich null (in unserem Fall $b_1=0$).

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Damit sieht unser Hochpass so aus:

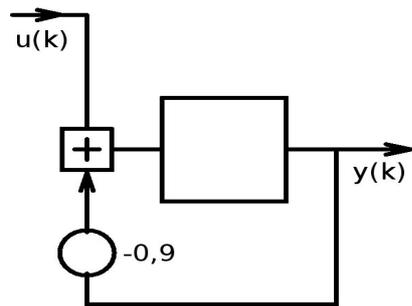


Bild 14: Filterstruktur des einpoligen Hochpassfilters mit $z_{\infty 0} = -0,9$

Die allgemeine Form der Filterstruktur ist so einfach aufgebaut dass sie sich im Programmform in drei Befehlszeilen hinschreiben lässt. Hier die Realisierung eines allgemeinen Filters in der Programmiersprache Tcl/Tk. Der grau hinterlegte Teil ist das Filter selbst, die anderen Teile sind nur zur Vorbereitung nötig (sicherstellen, dass alle Speicher zu Beginn den Wert 0 haben und zu prüfen ob es nicht doch mehr Nullstellen gibt als Pole). Allgemeines Filter heißt, dass sich mit diesen fünf unveränderten Zeilen alle denkbaren Filter realisieren lassen. Es müssen nur die entsprechenden Koeffizienten geladen werden. Oder anders ausgedrückt – um das Filterverhalten zu ändern braucht nicht einmal das Filterprogramm ausgetauscht werden, es genügt einfach andere Koeffizienten nachzuladen.

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

```
# ----- #
# Funktion: Berechnung der Werte y(k) aus den Werten u(k) #
# Versorgung: bedienstatus(betrieb) Steuereingang zum rückerstellen des Filters #
#             cn($i,real) Koeffizienten der Pole #
#             bn($i,real) Koeffizienten der Nullstellen #
#             zvar Zustandsvariable (wird nicht versorgt) #
#             wert Einzelwert für Filtereingang #
# Rückgabewert: Einzelwert des Filterausgangs #
# ----- #

proc filter { bedienstatus cn bn zvar wert } {
    upvar $bedienstatus bed
    upvar $cn c
    upvar $bn b
    upvar $zvar zv

    if { $bed(polanz) == 0 } {
        return $wert
    }
    if { $bed(nullanz) > $bed(polanz) } {
        meldung "Anzahl Nullstellen: $bed(nullanz) größer Anzahl Pole: $bed(polanz) -> kein mögliches Filter!"
        return 0
    }

    if { ![array exists zv] } {
        for {set i [expr {[array size b] / 2}]} {i < [expr {[array size c] / 2]} {incr i} {
            set b($i,real) 0.0
            set b($i,img) 0.0
        }
    }

    set ord_c [expr {[array size c] / 2 - 1}]
    if { !$bed(betrieb) } {
        for {set i 0} {i < [expr {[array size c] / 2]} {incr i} {
            set zv($i) 0.0
        }
        for {set i [expr {[array size b] / 2}]} {i < [expr {[array size c] / 2]} {incr i} {
            set b($i,real) 0.0
            set b($i,img) 0.0
        }
        set y 0
    } else {
        set y [expr { $wert * $b($ord_c,real) + $zv([expr { $ord_c - 1}]) } ]
        for {set i [expr { $ord_c - 1}]} {i >= 1} {incr i -1} {
            set zv($i) [expr { $wert * $b($i,real) - $y * $c($i,real) + $zv([expr { $i - 1}]) } ]
        }
        set zv(0) [expr { $wert * $b(0,real) - $y * $c(0,real) } ]
    }
    return "$y"
}
# Ende proc filter{ }
```

Bild 15: Komplettes universelles Filter in Tcl/Tk geschrieben. Die grau hinterlegten Zeilen sind das eigentliche Filter.

6. Was nur digitale Filter können

Wie ganz am Anfang schon beschrieben gibt es bei Filtern das Problem, dass sie meist an den Filterflanken kräftige Phasensprünge zeigen. Hier als Beispiel ein 6-poliger Bandpass. Die rote Linie zeigt den Phasenverlauf der jeweils an den Filterflanken und in der Mitte des Durchlassbereiches kräftige nichtlineare Änderungen zeigt.

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

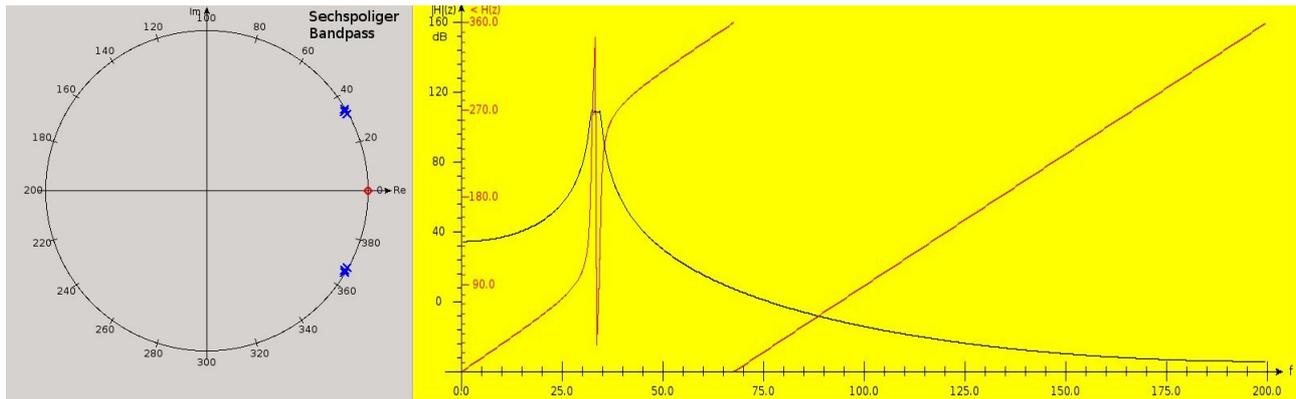


Bild 16: 6-poliges Filter mit Amplitudengang (schwarz) und Phasengang (rot)

Wie schon beschrieben, ist ein solcher Phasengang für normale Audioanwendungen kein Problem, hat man aber eine digitale Datenübertragung und nach diesem Filter einen Dekoder der diese Phasensprünge nicht verträgt ist mit dieser Kombination keine Dekodierung möglich.

Baut man ein Filter dessen Filterwirkung nur auf Nullstellen beruht (alle notwendigen Pole liegen also in Koordinatenursprung) kann man mathematisch nachweisen dass keine nichtlinearen Phasenverläufe auftreten wenn

- alle Nullstellen auf dem Einheitskreis liegen und jeweils doppelt sind oder
- zu jeder Nullstelle mit dem Betrag r die nicht auf den Einheitskreis liegt eine weitere mit dem Betrag $1/r$ und gleichem Winkel existiert

wobei wie erste Bedingung genau genommen ein Spezialfall der zweiten ist.

Um mit diesen Vorbedingungen ein Filter (also z.B. einen Bandpass) bauen zu können muss man im Sperrbereich die Filterverstärkung mit vielen dicht gesetzten Nullstellen auf 0 „festnageln“ und den Durchlassbereich einfach frei lassen. Nachdem aber Nullstellen ohne Pole nicht erlaubt sind, muss für jede Nullstelle ein Pol in den Koordinatenursprung gelegt werden. Auf diese Weise entstehen Filter mit sehr hoher Polzahl. Filter mit bis zu 1000 Polen sind nicht außergewöhnlich. Hier ein Beispiel für ein solches (in dem Fall 60-poliges) Bandfilter.

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

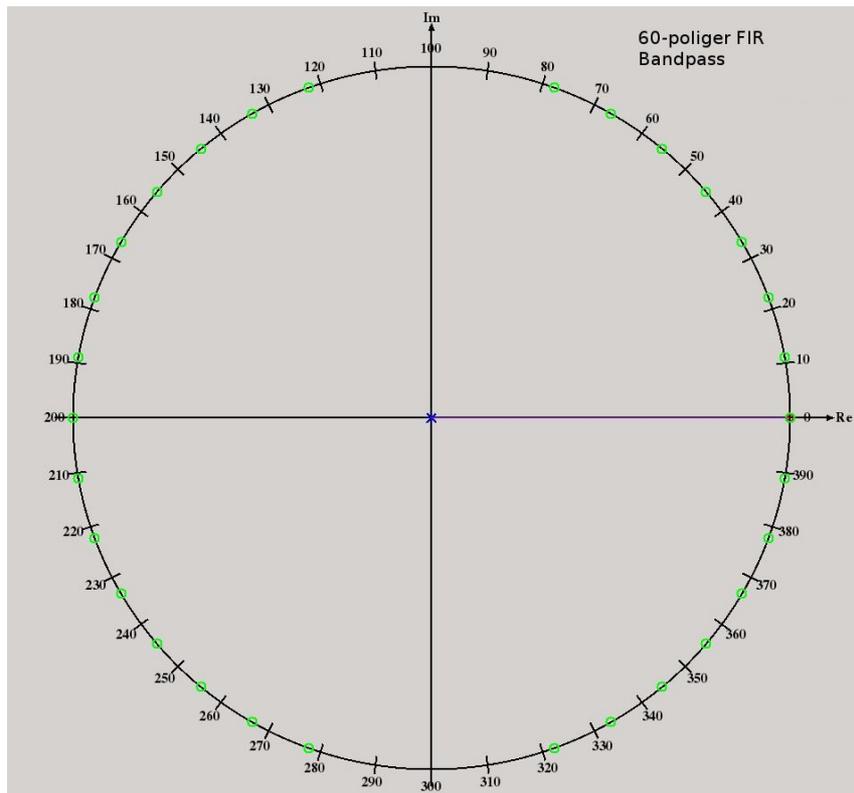


Bild 17: Beispiel eines 60-poligen FIR-Filters mit linearem Phasengang. Damit die Bedingung „nicht mehr Nullstellen als Pole“ erfüllt ist, liegen 60 Pole im Koordinatenursprung.

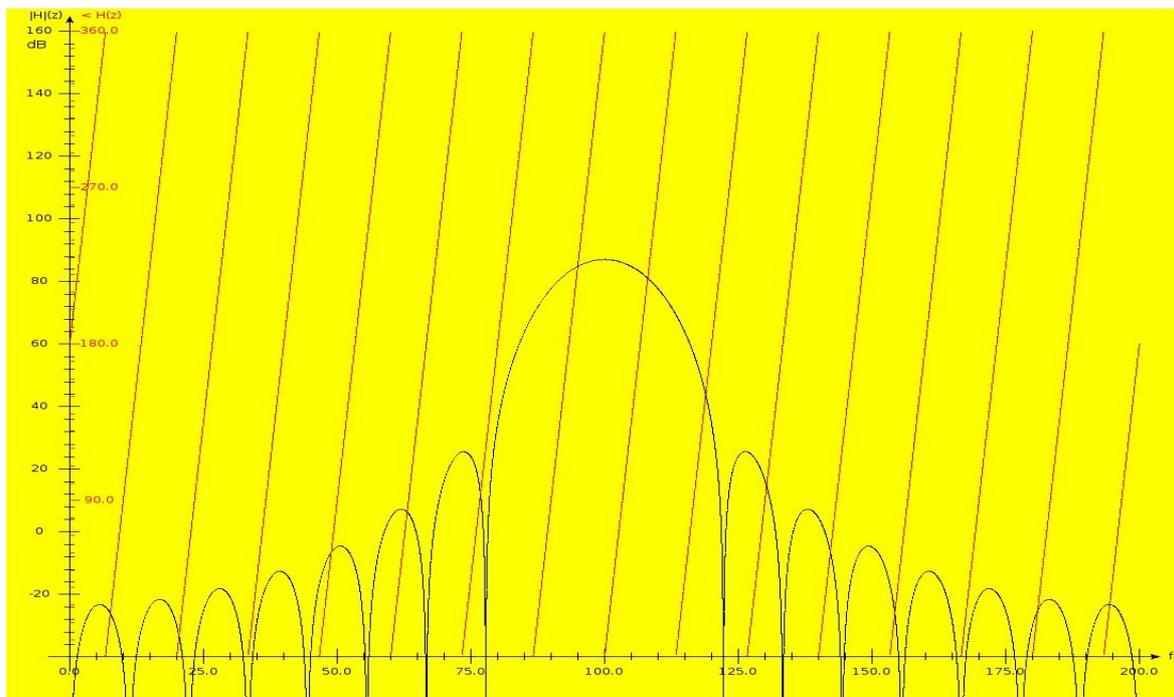


Bild 18: Typischer Amplitudengang eines FIR-Filters(schwarz), der Phasengang ist rot dargestellt.

Vom Pol-Nullstellendiagramm zum digitalen Filter

Sieht man sich die Filterstruktur dazu an, fällt auf, dass die Koeffizienten im Nenner alle 0 sind, das Filter hat also keinen Rückkopplungszweig mehr. Das hat zur Folge, dass sich eine Änderung im Eingangssignal nur solange am Ausgang auswirken kann wie die Speicherkette lang ist. (wenn die Speicherkette z.B. 10 Zellen lang ist, ist eine am Eingang aufgebraute Änderung nach spätestens 10 Takten durch das Filter durchgelaufen. Man nennt diese Filter deshalb FIR-Filter (Finite Response Filter).

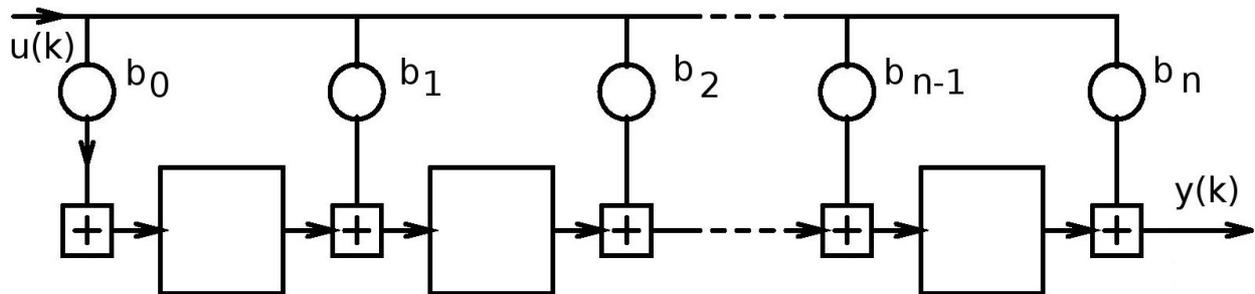


Bild 19: Die Struktur eines FIR-Filters

Literaturverzeichnis:

Brent B. Welch „Practical Programming in Tcl and Tk“

H.W. Schüßler „Digitale Systeme zur Signalverarbeitung“