Das Smith-Diagramm

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Heutzutage ist es nur schwer noch vorstellbar, wie man früher komplexere Berechnungen ohne Unterstützung durch Computer gemeistert hat. Dieser vermeintliche Nachteil alles per Hand oder höchstens mit Hilfe eines Rechenschiebers ausrechnen zu müssen hatte auch eine gute Seite. Es wurden graphische Verfahren entwickelt, die die Berechnungen deutlich vereinfachen konnten und die einem zusätzlich eine Vorstellung vermitteln konnten wie sich Ergebnisse bei Änderung der Eingangsgrößen verändern werden. Genau dieser letzte Punkt ist es, warum man diese graphischen Verfahren auch zu Zeiten der Unterstützung durch Rechner nicht über Bord werfen sollte. Ein solches Verfahren ist die Anwendung des Smith-Diagramms.

2. Komplexe Zahlen

In der Elektrotechnik sind komplexe Zahlen das Hilfsmittel schlechthin mit dem sich Vorgänge in Netzwerken beschreiben und berechnen lassen. Deshalb soll hier kurz nochmal auf die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten solcher Zahlen eingegangen werden.

Komplexe Zahlen bestehen aus zwei von einander unabhängigen Komponenten – dem Realteil und dem Imaginärteil. Will man eine komplexe Zahl graphisch darstellen, so geht das in einer Ebene die durch zwei Achsen aufgespannt wird – der realen und der imaginären Achse. In dem hier gezeigten Beispiel wird die Zahl 4 + j3 dargestellt. Verbindet man den Koordinatenursprung mit dem Punkt 4 + j3, erhält man eine Linie der Länge 5 (dem sogenannten Betrag und einem Winkel von atan(3/4) = 36,9 Grad. Wie man hier erkennen kann, lässt sich eine komplexe Zahl durch einen Punkt in der komplexen Ebene darstellen und entweder durch Real- und Imaginärteil beschreiben oder durch Betrag und Phase. Das ist genau das was man in Netzwerken die aus Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten bestehen braucht.

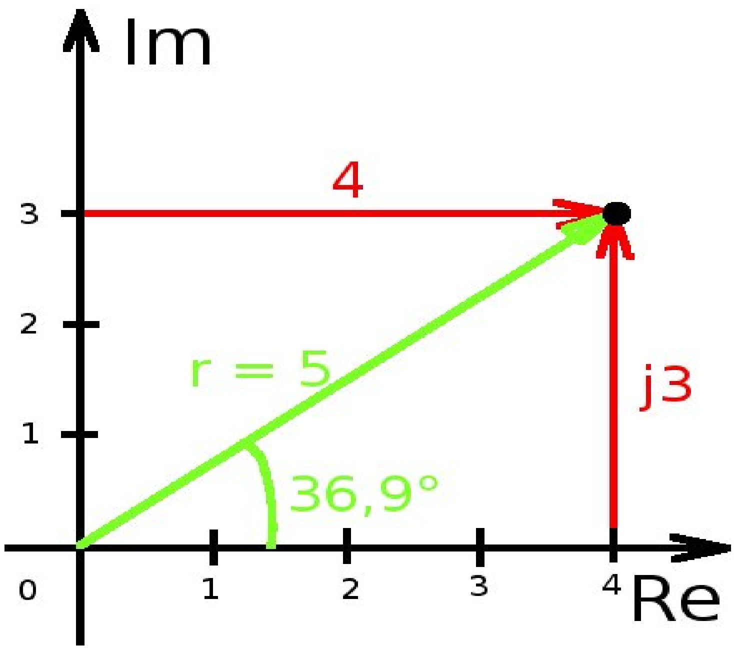


Bild 1: Die Darstellung einer komplexen Zahl (schwarzer Punkt) in kartesischen Koordinaten (rot) und polaren Koordinaten (grün).

Die Mathematiker haben für die Darstellung komplexer Zahlen zum einen die kartesische Darstellung $a+jb$ zum anderen die polare Darstellung die häufig in der etwas gewöhnungsbedürftigen Form $r*e^{j\phi}$ geschrieben wird. In unseren Beispiel wäre das also $5*e^{j36{,}9\,°}$.

2.1 Die Rechenregeln

Eigentlich sind alle Rechenregeln exakt die gleichen, die wir von unseren „normalen" Zahlen, den reellen Zahlen kennen. Nur beim Umgang mit dem „j" gibt es eine Besonderheit: $j*j=-1;$. Direkt daraus folgt der Zusammenhang $1/j=-j;$.

2.2 Ohne Normierung geht nichts.

Jedenfalls wenn man versucht etwas graphisch zu lösen – denn dann braucht man einen Maßstab. Beginnen wir aber erst mal mit der reinen Rechnung. Die Impedanz (also der Blindwiderstand) einer Spule berechnet sich so:

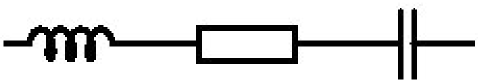
$$X_L=j\omega L=j2\pi f L;$$

Bei den Kondensatoren sieht es so aus:

$$X_C=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{2\pi f C};$$

Um die Blindwiderstände auszurechnen braucht man neben dem Wert für die Induktivität oder die Kapazität auch die Frequenz. Was man hier auch sieht ist, dass vor der Impedanz von Kondensatoren ein Minuszeichen steht. Setzt man in die Formeln die Werte ein, kommt beispielsweise etwas wie j*10kΩ heraus. Wenn man so einen Wert in einer Graphik einzeichnen möchte, muss man vorher natürlich angeben welche Länge in der Zeichnung 1kΩ entspricht. Gehen wir für unsere Beispiele mal von 1cm/jkΩ aus. Generell macht es Sinn, für die andere Achse den gleichen Maßstab zu nehmen also auch 1cm/kΩ.

Schaltet man Impedanzen (Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten) in Serie, werden die Werte einfach addiert. Das lässt sich natürlich auch graphisch machen. So würde die Serienschaltung von einer Induktivität von j10kΩ, einem Widerstand von 5kΩ und einer Kapazität von -j5kΩ rechnerisch ergeben:



$$X= \; j*10\mathrm{k}\Omega \quad + \quad 5\mathrm{k}\Omega \quad - \; j*5\mathrm{k}\Omega \; = \; 5\mathrm{k}\Omega+j5\mathrm{k}\Omega;$$

In der Zeichnung sieht das dann so aus:

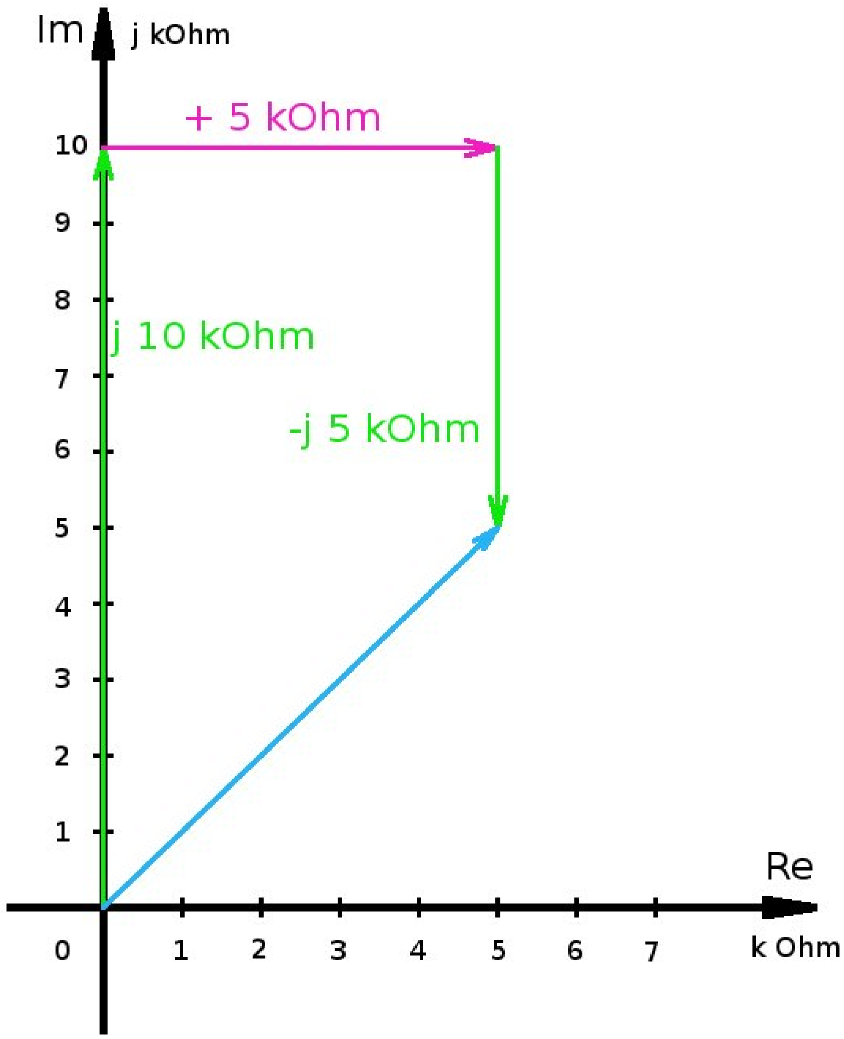


Bild 2: Graphische Addition komplexer Widerstände. (Das Ergebnis ist blau dargestellt).

Das Problem mit der Darstellung in der komplexen Ebene

Hat man nur Serienschaltungen von Impedanzen vor sich, ist die zeichnerische Konstruktion kein Problem – man hängt die Zeiger die die verschiedenen Werte repräsentieren einfach hintereinander.

Genau dasselbe gilt auch für die Parallelschaltung von Leitwerten und Admittanzen (also den Kehrwerten von Widerständen und Impedanzen). Das Problem beginnt wenn man eine Kombination von Serien- und Parallelschaltungen vor sich hat. Man kann zwar beginnen zuerst alle Impedanzen zusammenzuzählen. Spätestens dann wenn man aus einer Impedanz die zugehörige Admittanz machen möchte, versagt unser graphisches Verfahren. Rein rechnerisch sieht die Umwandlung so aus: Wenn

$X = a + jb;$ dann ist die zugehörige Admittanz

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{a+jb} = \frac{a-jb}{(a+jb)(a-jb)} = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2};$$

Ein graphisches Verfahren um in der in der oben gezeigten komplexen Ebene die Admittanz zu einer gegebenen Impedanz zu konstruieren wird man vergeblich suchen.

Die Abhilfe: Die Abbildung der oben gezeigten komplexen Ebene in eine andere Form mit Hilfe einer Möbius-Transformation. Diese andere Form wird als Reflexionsebene bezeichnet

3. Die Reflexionsebene

Bildet man die komplexe Ebene aus Bild 1 mit der Abbildungsvorschrift

$r(z)=\frac{z-1}{z+1};$ ab, dann erhält man folgendes Diagramm:

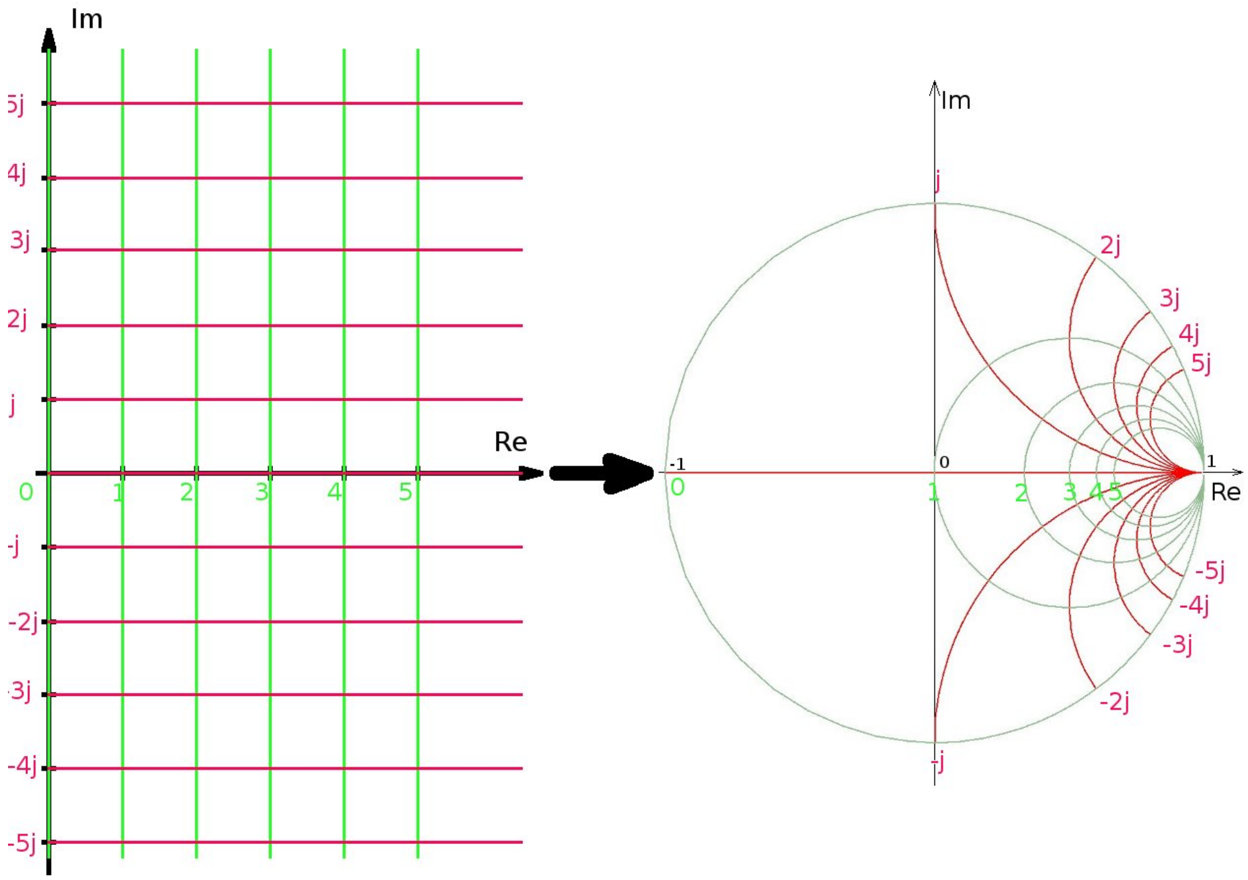


Bild 3: Die Abbildung komplexer Widerstände in die Reflexionsebene.

Wie man in dem Bild erkennen kann, werden die Linien mit gleichem Realteil oder gleichem Imaginärteil auf Kreisbögen abgebildet.

Das neue Diagramm hat einige interessante Eigenschaften. Eine davon ist die, dass man damit mit graphischen Mitteln aus einer Impedanz den zugehörigen Kehrwert, die Admittanz ermitteln kann.

Ersetzt man die Impedanz z durch deren Kehrwert, also der zugehörigen Admittanz so kommt man zu folgendem Ergebnis:

$r'(\frac{1}{z})=\frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1}=\frac{1-z}{1+z}=-r(z);$ oder in Worten ausgedrückt: Möchte man in der Reflexionsebene den Punkt finden, der den Kehrwert eines Impedanzwertes beschreibt, muss man den Punkt der Impedanz einfach im Koordinatenursprung spiegeln.

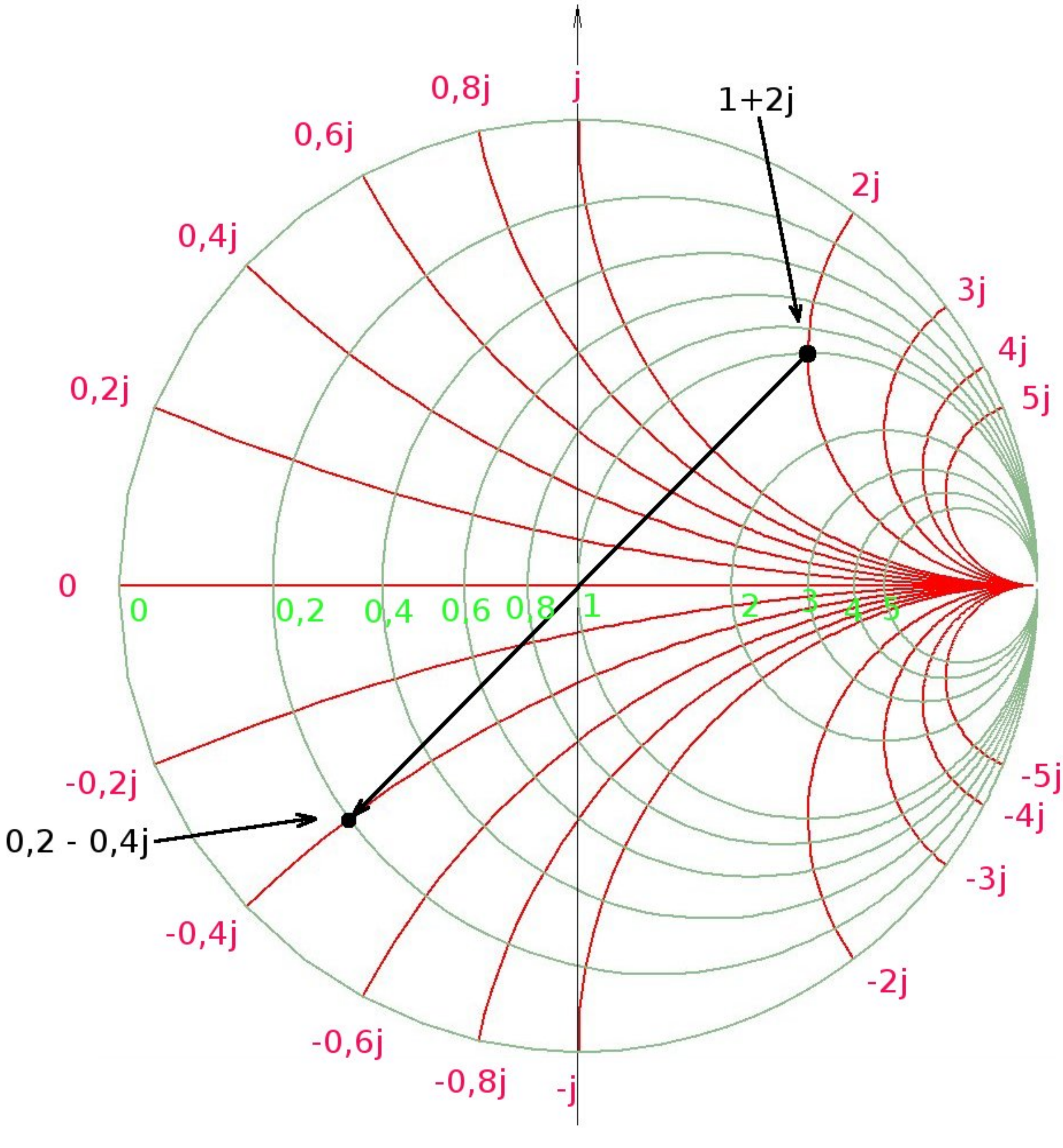


Bild 4: Beispiel: Ermitteln des Kehrwertes von 1+2j durch Spiegelung am Koordinatenursprung

Natürlich hat diese Form der Darstellung auch einen Nachteil: Die Punkte, die zu einer Impedanz oder Admittanz gehören lassen sich nicht mehr so einfach einzeichnen wie das in der Darstellung in Bild 1 funktioniert hat. Um das Einzeichnen trotzdem halbwegs komfortabel zu ermöglichen wird das rechtwinklige Gitternetz aus Bild 1 Punkt für Punkt transformiert und in der Reflexionsebene eingezeichnet. So kann man die gewünschten Punkte durch „Abzählen“ der Linien finden. Das so entstandene Diagramm wurde 1939 von Herrn Philipp Smith vorgestellt und ist deshalb nach ihm benannt.

3.1 Normierung muss sein

Auch hier braucht es eine Normierung. Die sieht allerdings etwas anders aus als die im Bild 1:

Während man im Bild 1 den Maßstab in Ω/cm oder kΩ/cm angeben kann, ist es hier der Widerstandswert den der Koordinatenursprung anzeigen soll. Sinnvoll sind Werte zu denen die Güte der Anpassung bestimmt werden soll – in unseren Fällen sind das meist 50Ω.

Beispiel: In einem 50Ω-System (Generatorimpedanz = 50Ω, Wellenwiderstand der Verkabelung= 50Ω) macht es natürlich Sinn alles auf 50Ω zu normieren. Würde man an einem Verbraucher (z.B. an einem Antenneneingang) 170Ω + j30Ω messen dann sähe die Normierung auf 50Ω so aus:

$$X_N = \frac{170\,\Omega}{50\,\Omega} + j\frac{30\,\Omega}{50\,\Omega} = 3{,}4 + j0{,}6\,;$$

4. Bestimmung des Reflektionsfaktors

Hat man seine Werte auf diese Weise normiert, kann man die zweite Eigenschaft des Smith-Diagramms ausnutzen: Man kann den Betrag des Reflexionsfaktors direkt ablesen. Es ist der Abstand des X_N - Punktes zum Koordinatenursprung.

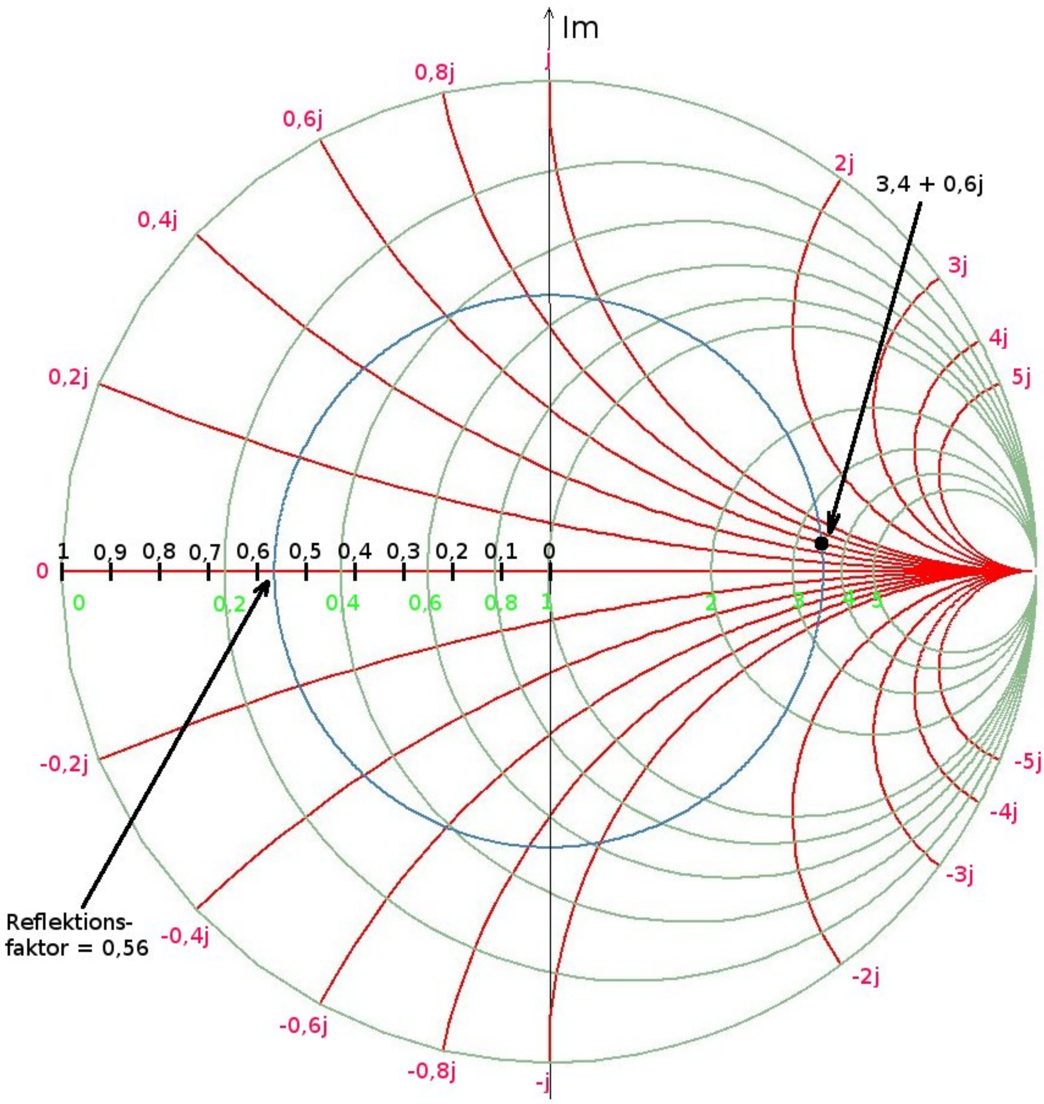


Bild 5: Beispiel: Bestimmung des Reflektionsfaktors der Impedanz 3,4 + 0,6j

5. Bestimmung des Stehwellenverhältnisses

Wer statt dessen lieber das Stehwellenverhälnis wissen möchte, kann es aus dem Betrag des Reflexionsfaktors nach der Formel

$v = \frac{1+|r|}{1-|r|}$;   ausrechnen.

Im Smith-Diagramm ließe sich der Maßstab für den Reflektionsfaktor auch durch einen für das Stehwellenverhältnis ersetzen

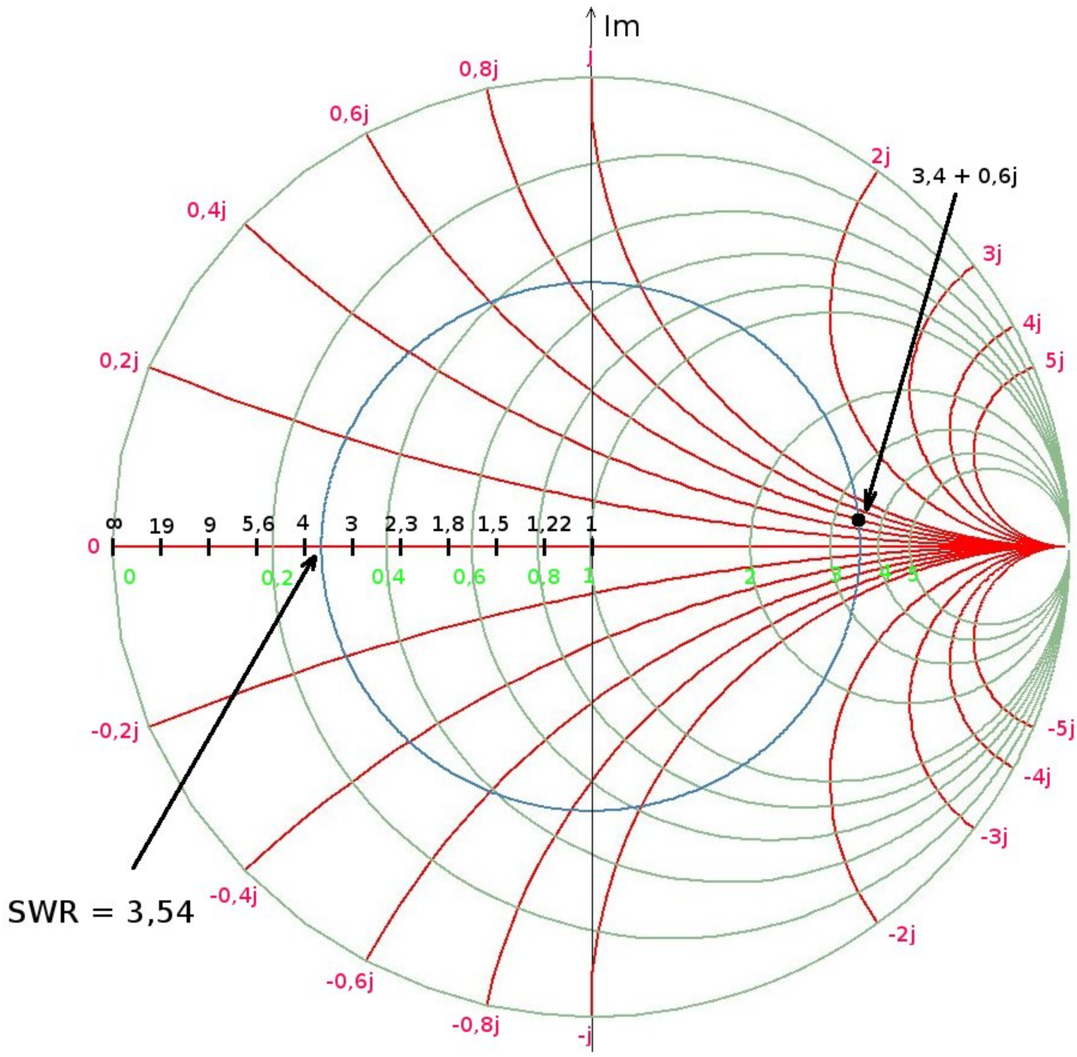


Bild 6: Beispiel: Bestimmung des SWR an der Impedanz 3,4 + 0,6j

6. Die Wirkung von Leitungen

Misst man die Impedanz eines Verbrauchers durch eine Leitung , sieht man nicht mehr die originale sondern die durch die Leitung transformierte Impedanz. Wie diese Transformation aussieht kann man mit dem Smith-Diagramm ebenfalls auf recht einfache Weise bestimmen: Man zieht einen Kreisbogen um den Koordinatenursprung der an dem Punkt der zu transformierenden Impedanz beginnt und dessen Winkel der elektrischen Länge der transformierenden Leitung entspricht. λ/2 entspricht dabei 360° im Smith-Diagramm. Der Endpunkt dieses Kreisbogens zeigt dann die transformierte Impedanz an.

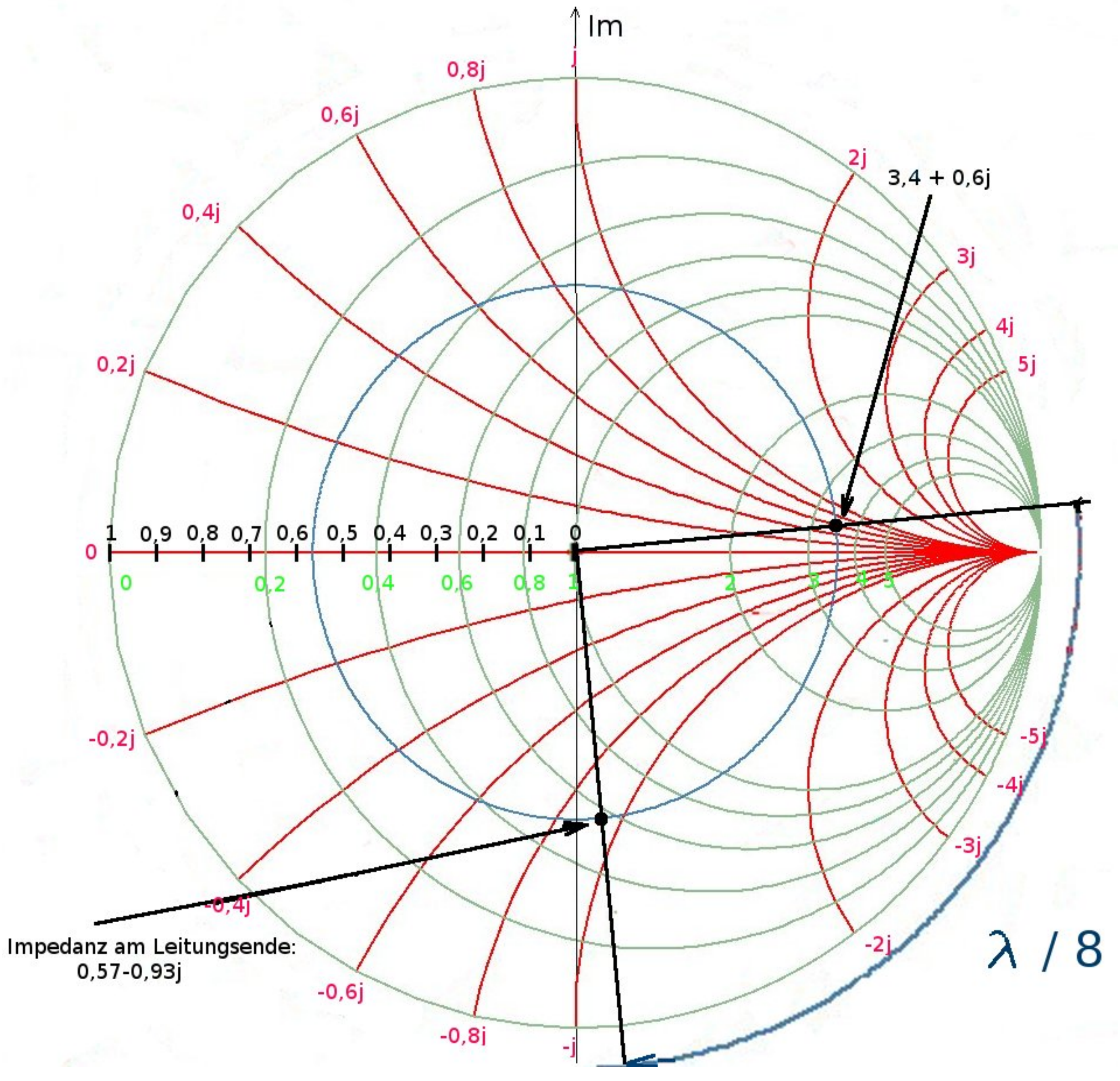


Bild 7: Beispiel: Transformation der Impedanz 3,4 + 0,6j an einer λ/8 langen Leitung

Das hier beschriebene Verfahren funktioniert ganz genauso in der Admittanzebene.

7. Ein Beispiel:

Hier soll anhand eines kleinen Beispiels gezeigt werden, wie sich Netzwerke von komplexen Widerständen graphisch „berechnen“ lassen. Dazu soll folgendes RLC-Netzwerk untersucht werden von dem wir den Betrag des Reflexionsfaktors ermitteln wollen wenn wir ein Signal mit einer Impedanz von 50Ω einspeisen wollen. Die Werte sollen sein:

f = 14MHz

C = 200pF

L = 400nH

R = 20Ω

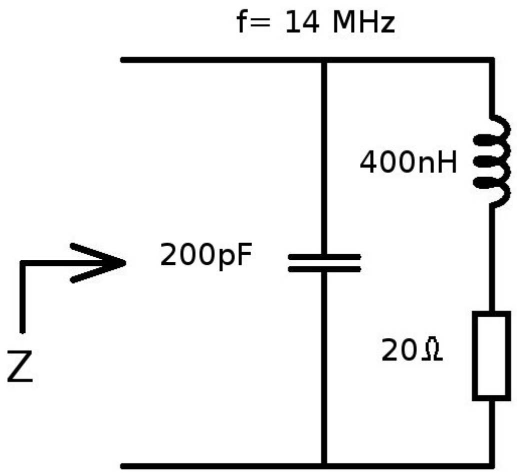


Bild8: Zu berechnendes Netzwerk

7.1 Erster Schritt: Berechnung der Impedanzen und Admittanzen

R = 20Ω; Da gibt es nichts zu berechnen

$$X_L = j2\pi f L = j2*\pi*14*10^6*4*10^{-7}\Omega = j35{,}2\,\Omega$$

Beim Kondensator ist es in unserem Fall einfacher gleich die Admittanz zu berechnen. Dadurch ersparen wir uns einen Konstruktionsschritt im Smith-Diagamm

$$\frac{1}{X_C} = j2\pi f C = j*2*14*\pi*10^6*2*10^{-10}\frac{1}{\Omega} = j1{,}76*10^{-2}\frac{1}{\Omega};$$

7.2 Zweiter Schritt: Die Normierung

Bei der Normierung wird bei Impedanzen alles in Vielfachen von 50Ω ausgedrückt, bei

Admittanzen entsprechend in Vielfachen von $\frac{1}{50\,\Omega}$:

$$R_N = \frac{20\,\Omega}{50\,\Omega} = 0{,}4\,;$$

$$X_{LN} = j\frac{35{,}2\,\Omega}{50\,\Omega} = j0{,}7\,;$$

$$\frac{1}{X_{CN}} = j*50\,\Omega*1{,}76*10^{-2}\frac{1}{\Omega} = j0{,}88\,;$$

7.3 Dritter Schritt:

Einzeichnen des Punktes für die Induktivität.

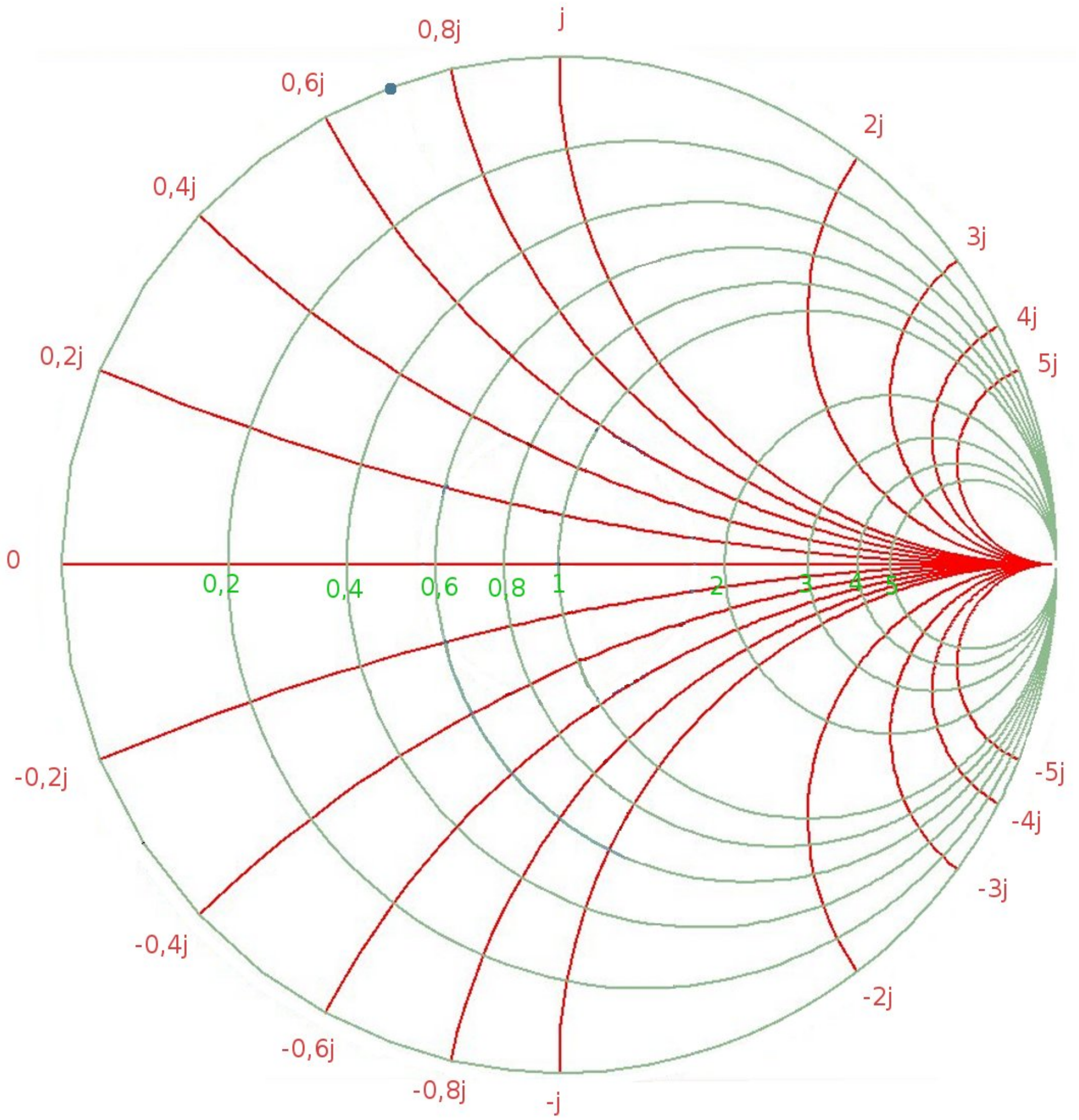


Bild 9: Der Punkt bei 0,7j + 0 gibt die Impedanz der 400nH Induktivität bei 14 MHz in dem auf 50Ω normierten Diagramm an.

7.4 Vierter Schritt:

Addition des Widerstandswertes

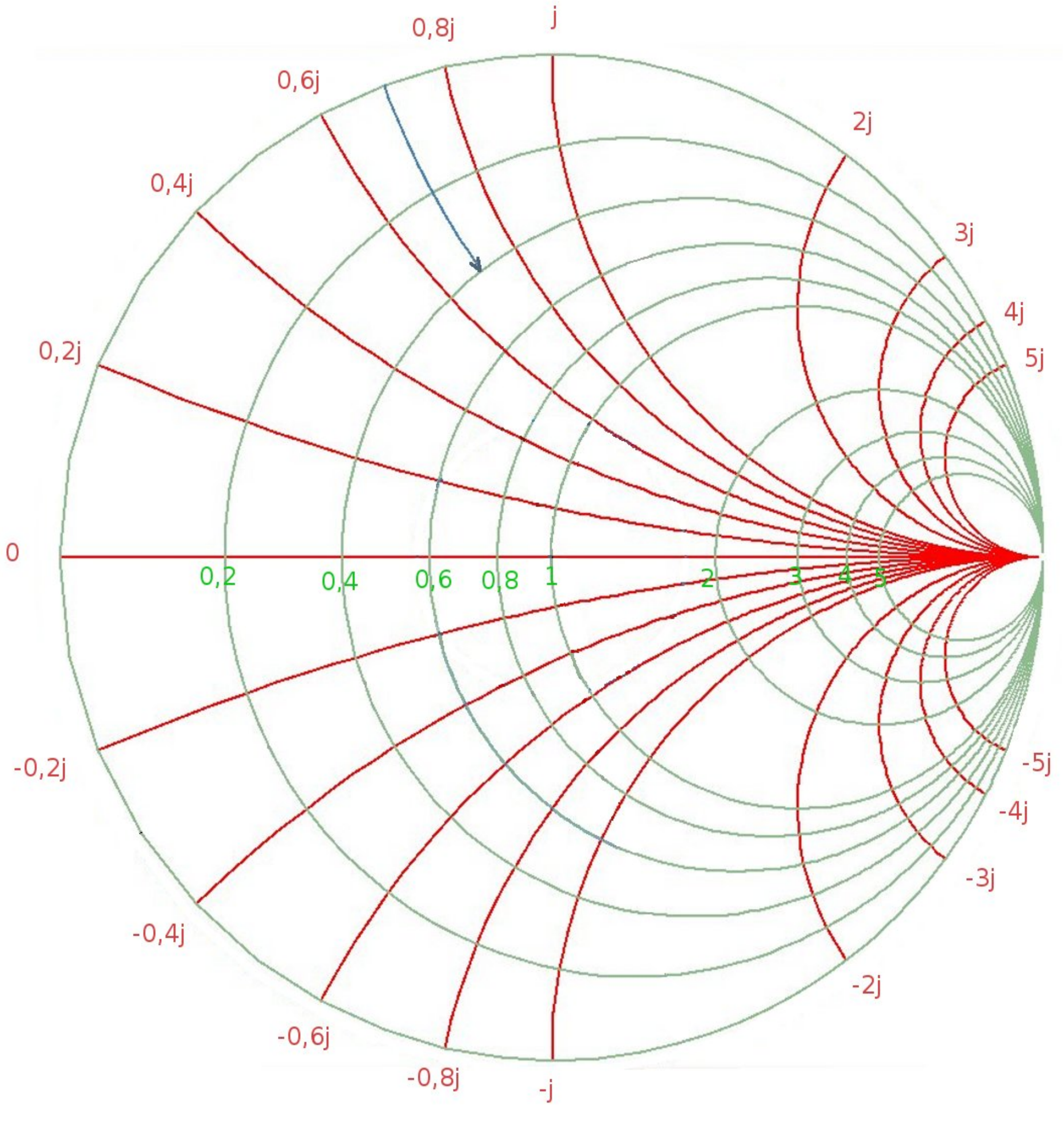


Bild 10: Das Pfeilende zeigt auf den Punkt der die Impedanz der R/L-Kombination 20Ω / 400nH bei 14MHz im auf 50Ω normierten Diagramm beschreibt.

7.5 Fünfter Schritt:

Da jetzt etwas parallel geschaltet wird, muss mit Admittanzen weitergearbeitet werden. Die Admittanz der eben ermittelten Impedanz erhält man durch Spiegeln des Impedanzpunktes im Koordinatenursprung. Aus dem Punkt 0,4 + 0,7j in der Impedanzebene wird dann der Punkt 0,6 – 1,07j in der Admittanzebene

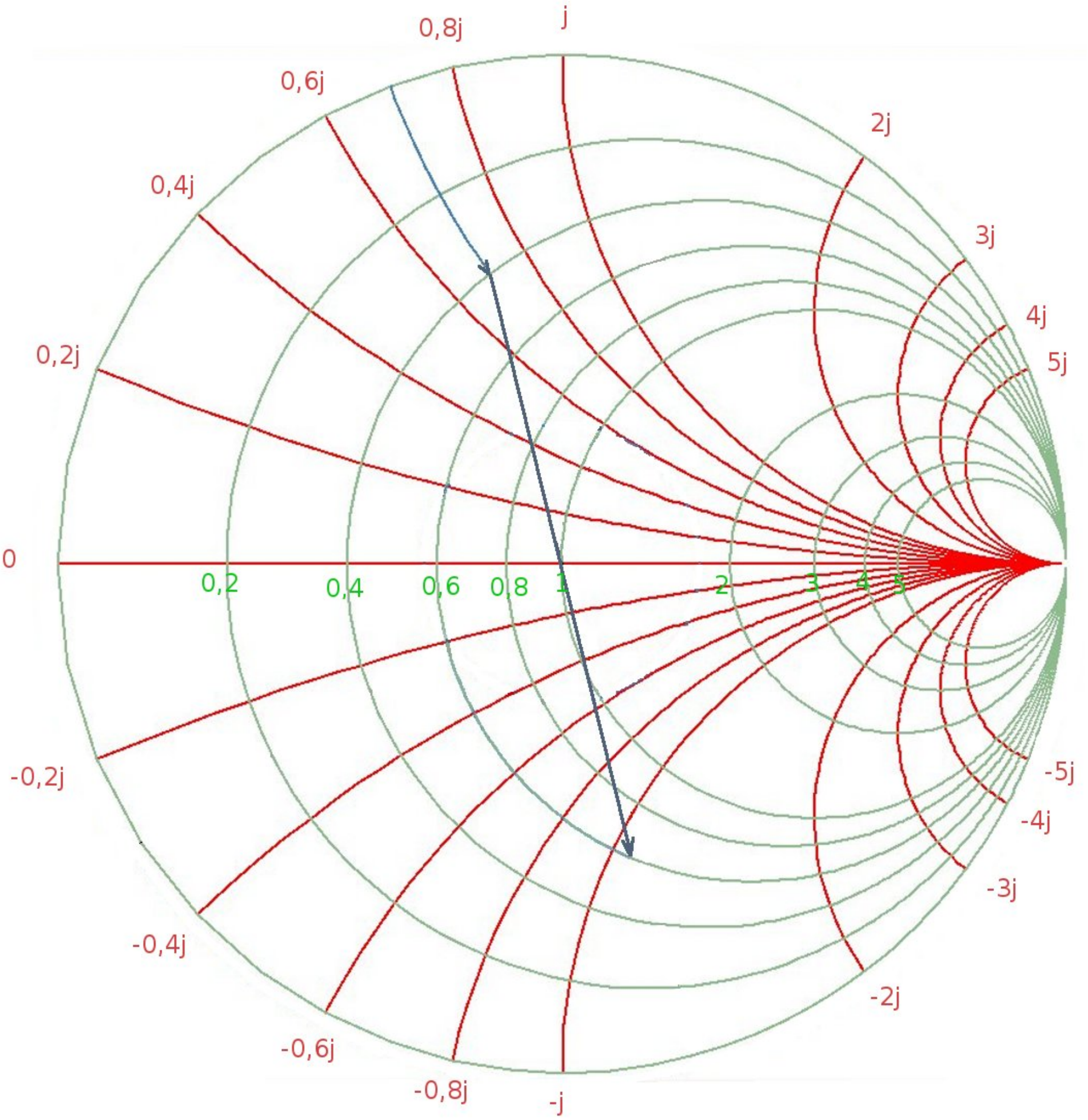


Bild 11: Das Pfeilende zeigt auf den Punkt der die Admittanz der R/L-Kombination 20Ω / 400nH bei 14MHz im auf 50Ω normierten Diagramm beschreibt. Ergebnis 0,6-1,07j

7.6 Sechster Schritt

Aufaddieren der Admittanz des Kondensators. Dabei ist zu beachten, dass das Diagramm jetzt die Admittanzen zeigt. Während die Impedanz eines Kondensators negativ ist, ist dessen Admittanz positiv. Der Wert von 0,88j ist also vorzeichenrichtig aufzuaddieren.

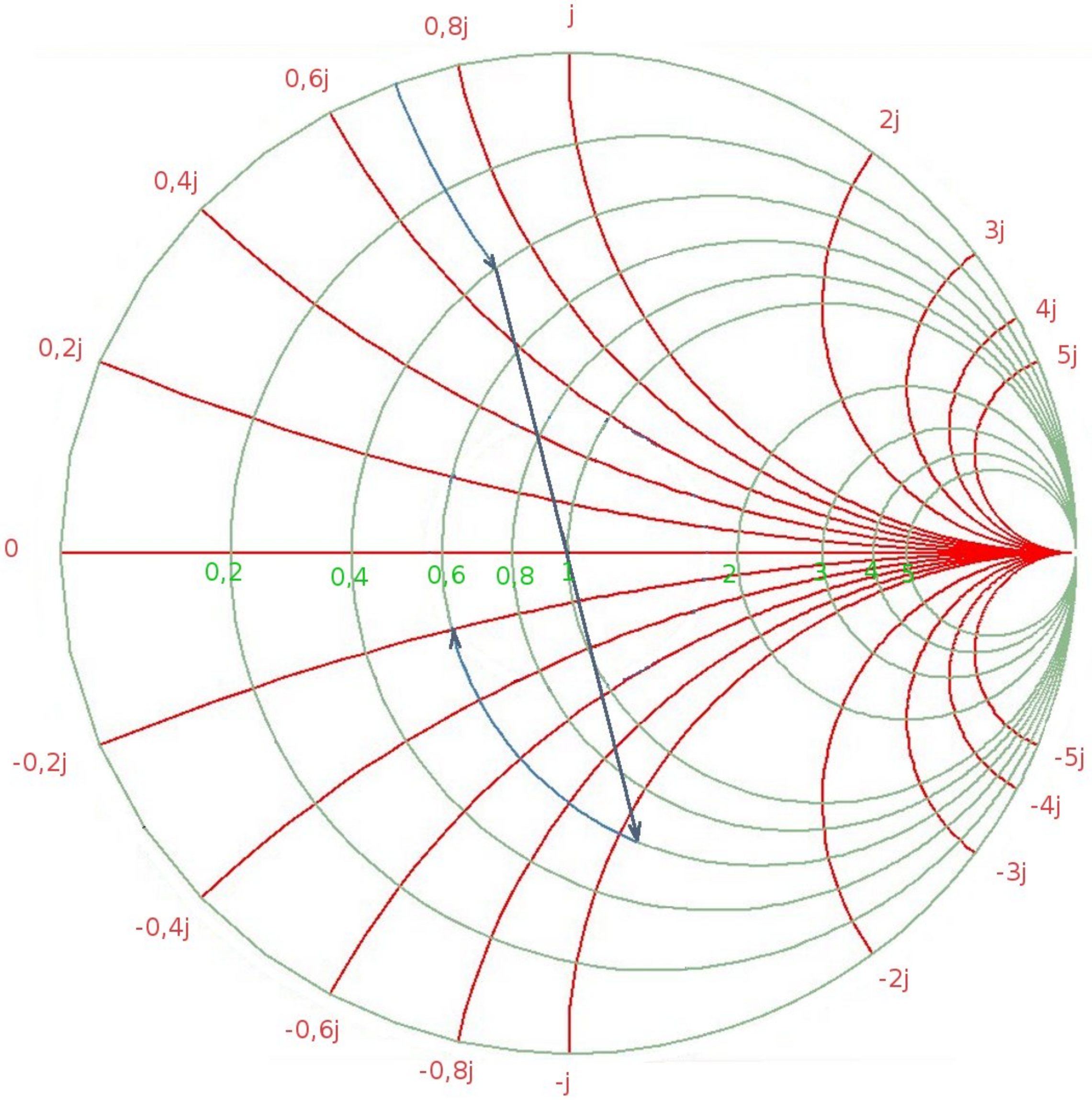


Bild 12: Das Pfeilende zeigt auf den Punkt der die Admittanz der R/L/C-Kombination 20Ω / 400nH/200pF bei 14MHz im auf 50Ω normierten Diagramm beschreibt. Ergebnis: 0,6-0,19j

Man könnte jetzt die zugehörige Impedanz durch eine weitere Spiegelung erhalten. Das Ergebnis wäre 1,5 + 0,47j. Das würde dann 75Ω + 267nH entsprechen.

In diesem Beispiel soll statt dessen gezeigt werden wie man dieses RLC-Netzwerk erweitern kann um eine exakte Anpassung an ein 50Ω-System zu erreichen.

7.7 Anpassung des Netzwerks an ein 50Ω-System

Eine exakte Anpassung erreicht man, wenn es einem gelingt den mit der resultierenden Impedanz oder Admittanz im Koordinatenursprung (1 + 0j) zu landen. Der einfachste Weg in diesem Beispiel wäre die Parallelschaltung eines Leitwertes und einer Admittanz (0,4 + 0,2j), also eines 125Ω

Widerstandes und eines Kondensators von 45pF. Diese Lösung ist aber wegen des Widerstandes nicht verlustfrei.

7.7.1 Verlustfreie Anpassung des Netzwerks an ein 50Ω-System

Für eine verlustfreie Anpassung benötigt man neben einer Induktivität oder einer Kapaziät ein Stück Übertragungsleitung. Wie oben schon gezeigt bewegt sich der Impedanz- oder Admittanzpunkt bei dem Einsatz einer Übertragungsleitung auf einem Kreis um den Koordinatenursprung. Bei einer Länge von λ/2 wird der ursprüngliche Punkt wieder erreicht. Die Länge der benötigten Leitung ermittelt man indem man um den Koordinatenursprung einen Kreis zeichnet der durch den anzupassenden Punkt geht. Dieser Kreis schneidet den grünen Kreis mit R=1 in zwei Punkten. An beiden Punkten ist dann eine Anpassung mit Hilfe einer Induktivität oder Kapazität möglich.

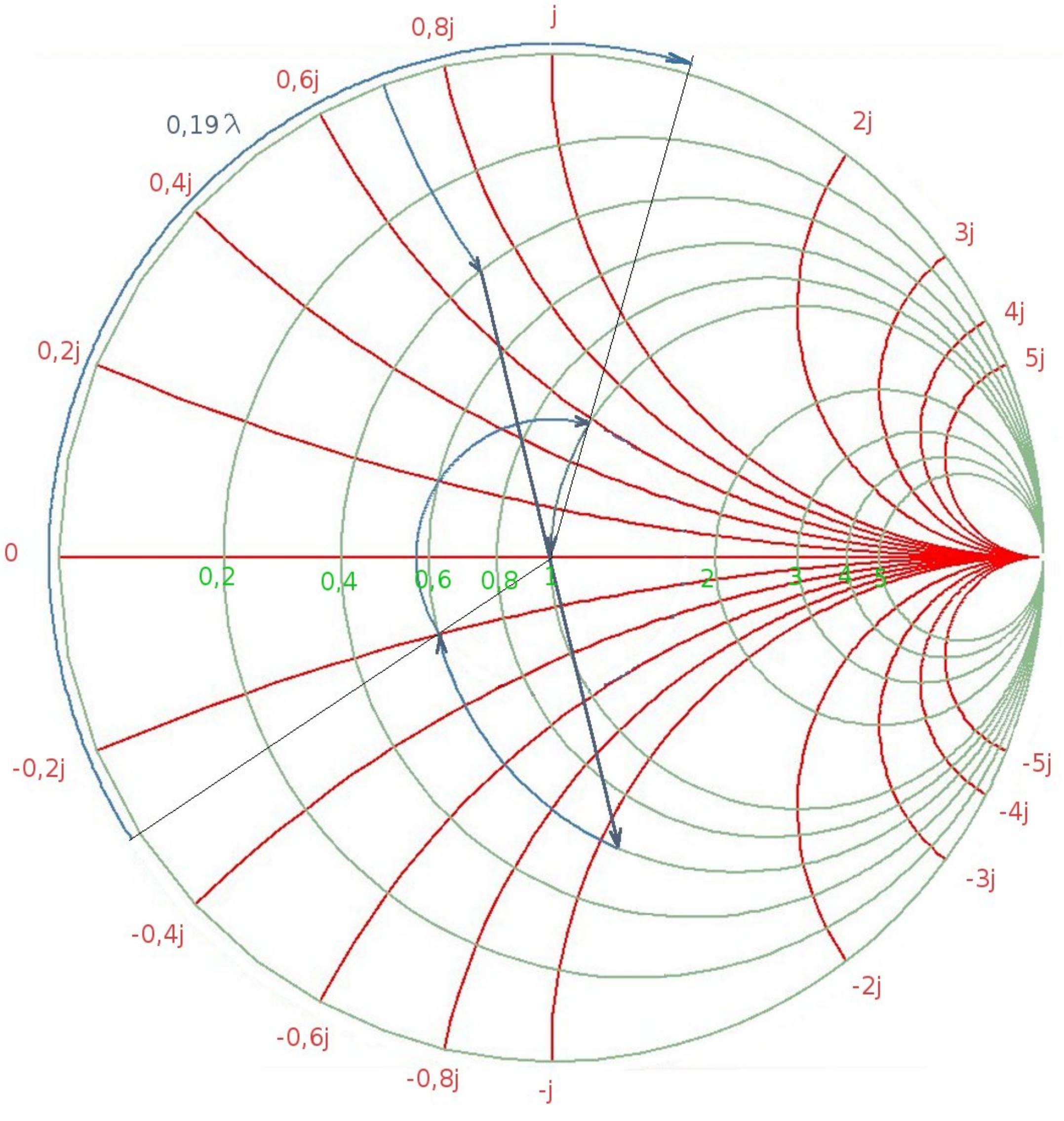


Bild 13: Transformation durch eine 0,19λ Leitung. Für die korrekte Anpassung ist eine Admittanz von -0,58j nötig was einer Parallelinduktivität von 980nH entspricht.

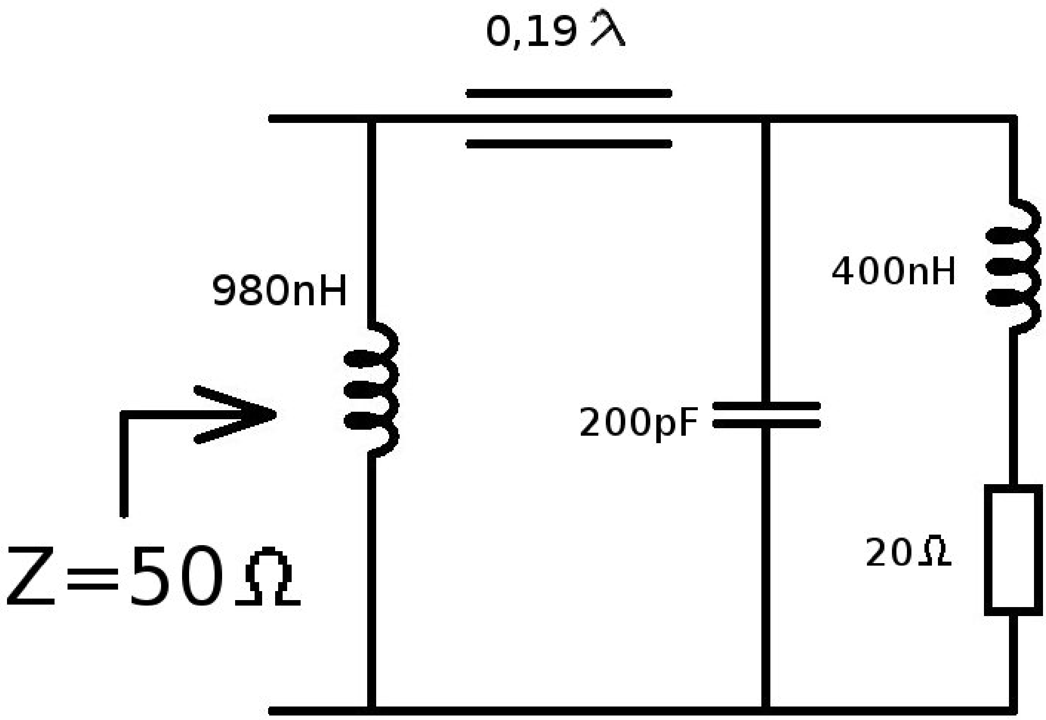


Bild 14: Das Netzwerk für eine verlustfreie Anpassung mit Hilfe einer Induktivität

Der zweite Schnittpunkt des Kreises tritt bei 0,39λ auf. Um von diesem Punkt zu dem Koordinatenursprung zu kommen ist eine positive Admittanz, also ein Kondensator nötig.

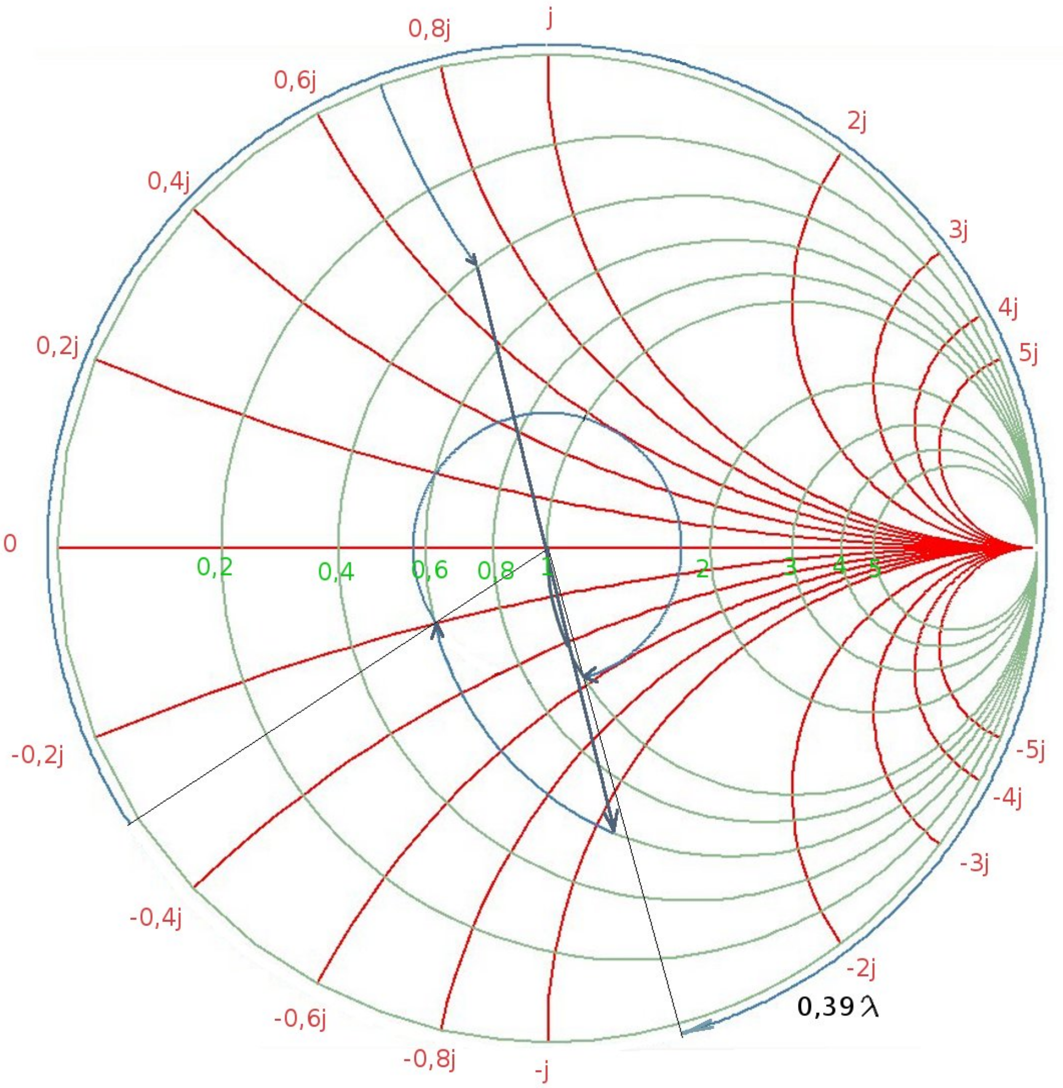


Bild 15: Transformation durch eine 0,39λ Leitung. Für die korrekte Anpassung ist eine Admittanz von 0,58j nötig was einer Parallelkapazität von 130pF entspricht.

Die Schaltung sieht dann wie im Bild 16 gezeigt aus.

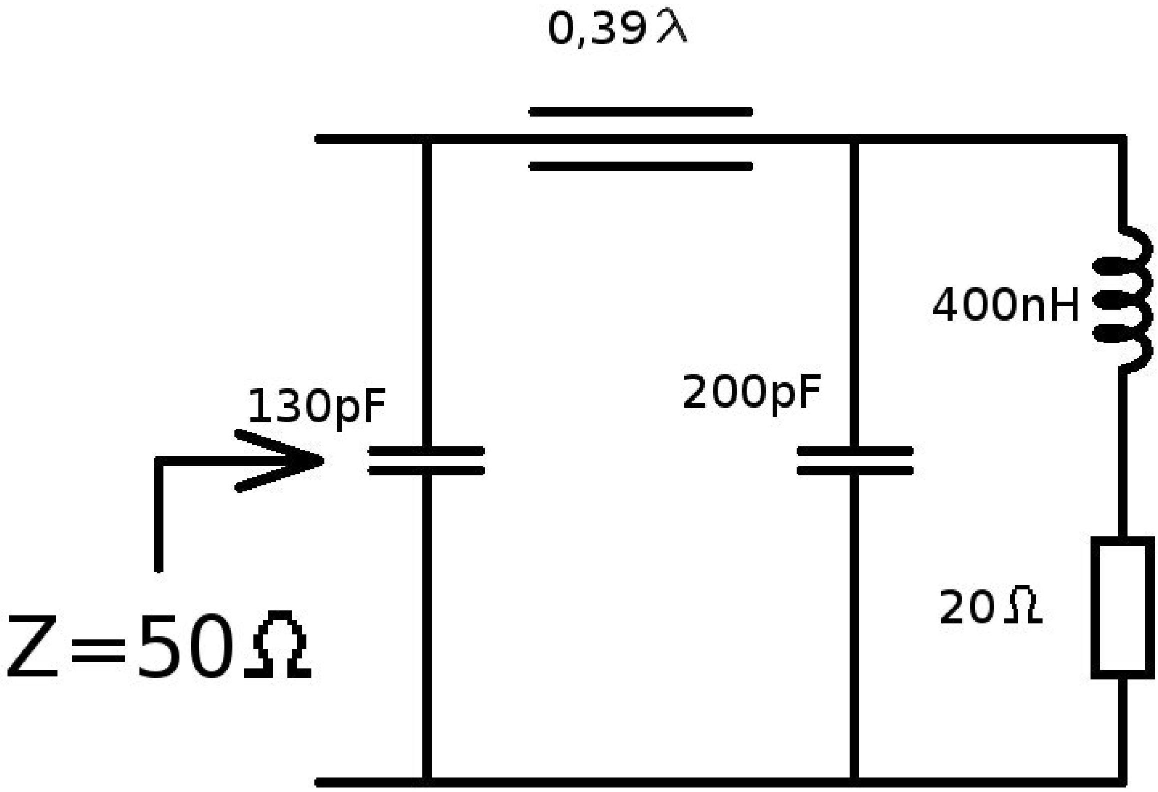


Bild 16: Das Netzwerk für eine verlustfreie Anpassung mit Hilfe einer Kapazität.

8. Quellenverzeichnis

Institut für Hochfrequenztechnik der Universität Erlangen-Nürnberg
Skript zur Vorlesung „Bauelemente III“ von Prof. Dr.-Ing Hans Brand