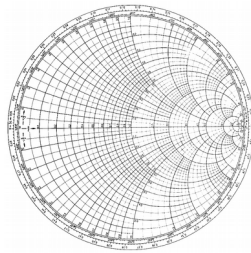


Das Smith Diagramm

und seine Anwendung bei der Anpassung von Impedanzen



Ein Ingenieur namens Smith fand ca. 1940 eine Methode, um komplexe Widerstände und Leitwerte grafisch anschaulich darzustellen und um einfach zeichnerisch mit ihnen zu rechnen. Auch wenn man heute das Rechnen eher einem Computerprogramm überläßt, ist die Visualisierung der Zusammenhänge durch das Smith Diagramm unverändert wertvoll für das Verständnis.

1 Von Äpfeln und Birnen zum Smith Diagramm

Äpfel und Birnen sind nicht dasselbe, aber man kann sie doch unter einen Hut bringen:

In der „Obst-Ebene“ beschreibt die Angabe von z.B. „4 Äpfel + 2 Birnen“ den „Obst“-Wert.

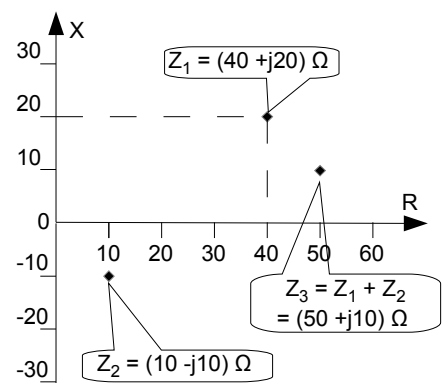
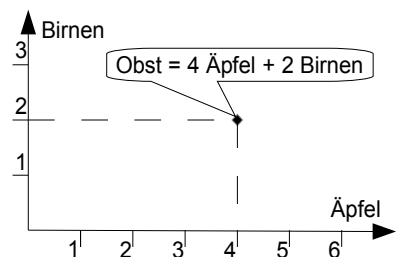
In der Elektrotechnik haben wir es zu tun mit

- dem Ohm'schen Wirkwiderstand (von „Widerständen“), bei dem Spannung und Strom phasengleich sind
- dem induktiven bzw. kapazitiven Blindwiderstand (von Spulen bzw. Kondensatoren), bei dem die Spannung bzw. der Strom voreilt¹

Wir bringen das unter einen Hut, indem wir in einem rechtwinkligen Koordinatensystem den Ohm'schen Wirkwiderstand R auf der R -Achse nach rechts auftragen, und den induktiven Blindwiderstand X einer Spule auf der X -Achse nach oben. Der kapazitive Blindwiderstand von Kondensatoren wird auf der X -Achse in entgegengesetzter Richtung, also zu negativen Werten hin, aufgetragen.

Bei einem komplexen Wechselstromwiderstand (einer Impedanz) stellen wir klar, was der Wirkwiderstand und was der Blindwiderstand ist, indem wir vor den Blindwiderstand das Zeichen „j“ setzen², also: $Z = R + jX$.

Wenn man zwei Impedanzen in Serie schaltet, addieren sich jeweils die Wirkwiderstände und die Blindwiderstände.



¹ Wenn man an eine Spule eine Spannung anlegt, dann baut sich verzögert gegen den induktiven Widerstand der Spule ein Strom auf. Wenn man an einen Kondensator einen Strom anlegt, dann baut sich verzögert, wenn der Kondensator mit elektrischen Ladungen gefüllt wird, am Kondensator eine Spannung auf.

² „j“ ist die „imaginäre Einheit“ (in der Technik als „j“ und in der Mathematik als „i“ bezeichnet). $j = \sqrt{-1}$, also die Wurzel aus minus eins. Innerhalb der „reellen Zahlen“ (das sind alle Zahlen, die man entlang einer Achse, also z.B. entlang eines Meterstabs, ablesen könnte) gibt es keine Wurzel aus einer negativen Zahl. Zusammen mit der imaginären Einheit erhalten wir jedoch die „komplexen Zahlen“, und für uns bedeutet hier „j“ einfach, daß der bei „j“ stehende Wert auf einer gegenüber der R -Achse um 90° nach oben gedrehten Achse zu interpretieren ist. R ist der Realteil und X ist der Imaginärteil der komplexen Impedanz Z .

Vom rechtwinkligen Koordinatensystem gehen wir zum Smith Diagramm über, indem wir die rechte Widerstandshalbebene in das Innere eines Kreises (die Ebene des Reflexionsfaktors) abbilden.

Das bietet wesentliche Vorteile.

Das Smith Diagramm stellt die vollständige rechte Impedanz-Halbebene dar. Darstellungen in Smith Diagrammen sind untereinander gut vergleichbar.

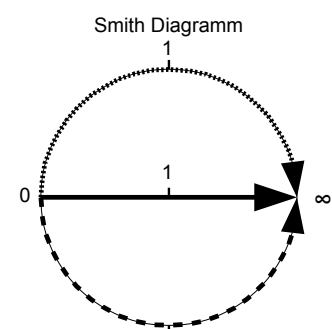
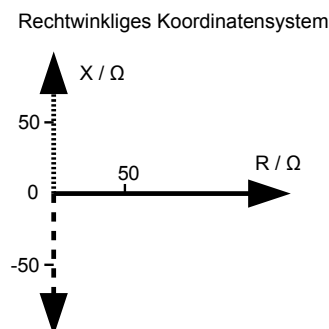
Für die Arbeit im Smith Diagramm ist es üblich, die Impedanz zu normieren, d.h. durch einen Bezugswert zu teilen³. Üblich ist für unsere Zwecke ein Bezugswert von $50\ \Omega$.

Beispiel: Aus $Z = (25 + j75)\ \Omega$ machen wir $z = \frac{Z}{50\ \Omega} = (0,5 + j1,5)$.

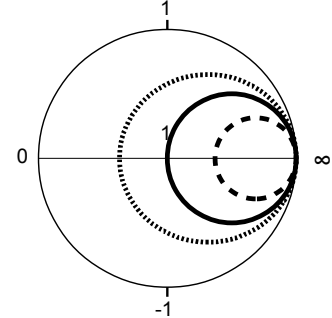
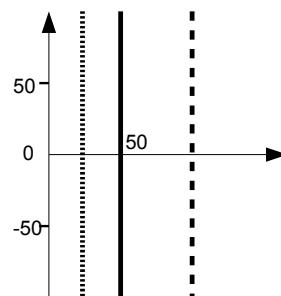
Zum Schluß können wir die normierten Werte wieder in die tatsächlichen Impedanzwerte zurückverwandeln, indem wir mit dem Bezugswert multiplizieren: $Z = (0,5 + j1,5) * (50\ \Omega) = (25 + j75)\ \Omega$.

Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele dafür, welche Linien des rechtwinkligen Koordinatensystems sich in welche Linien des Smith Diagramms verwandeln.

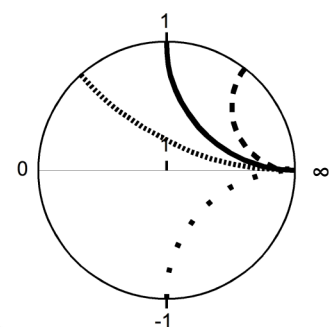
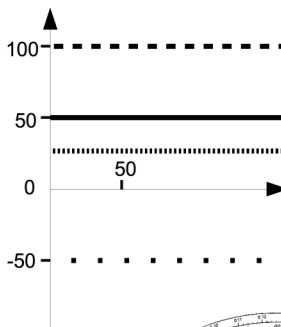
Zuerst die Koordinatenachsen. Der Mittelpunkt des Smith Diagramms ist der Punkt $r = 1$. Links im Diagramm sind die Werte gedehnt, rechts zusammengestaucht.



Auf den Linien eines konstanten Ohm'schen Widerstands hat der Ohm'sche Widerstand überall auf dieser Linie den selben Wert, aber der Blindwiderstand ändert sich entlang der Linie. Deshalb müssen diese Linien auch im Smith Diagramm irgendwie „neben“ der X – Achse laufen.

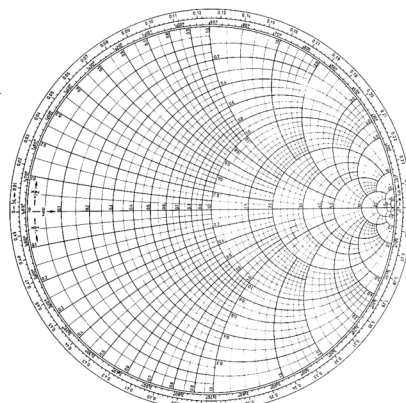


Auf den Linien eines konstanten Blindwiderstands hat der Blindwiderstand überall auf dieser Linie den selben Wert, aber der Ohm'sche Widerstand ändert sich entlang der Linie. Deshalb müssen diese Linien auch im Smith Diagramm irgendwie „neben“ der R – Achse laufen.



Zusammengenommen ergibt sich das für das Smith Diagramm typische Aussehen.

Genau wie im rechtwinkligen Koordinatensystem stehen auch im Smith Diagramm die Linien von $R = \text{konstant}$ und $X = \text{konstant}$ in jedem einzelnen Punkt des Diagramms senkrecht aufeinander.



³ Einige Computerprogramme zeigen wahlweise oder grundsätzlich die nicht normierte Impedanz.

2 Impedanzen und Leitwerte im Smith Diagramm

Wenn man zwei komplexe Widerstände parallel schaltet, addieren sich die komplexen Leitwerte.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{Z} = Y = G + jB$$

Y = komplexer Leitwert (Admittanz)

G = Ohm'scher Wirkleitwert (Konduktanz)

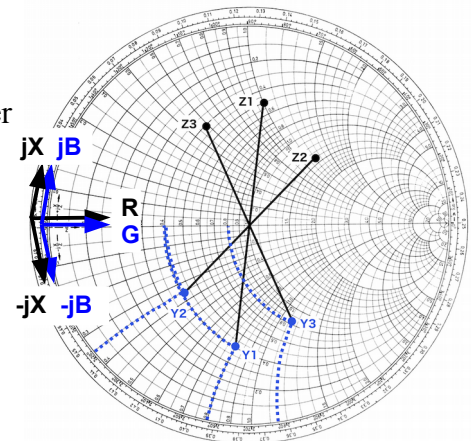
B = Blindleitwert (Suszeptanz)

Das kann man berechnen.⁴ Und im Smith Diagramm kann man es sehr einfach grafisch lösen. Die Basis hierfür ist, daß man im Smith Diagramm den Kehrwert bekommt, wenn man am Mittelpunkt des Kreises spiegelt.

Im Smith Diagramm kann man leicht zwischen der komplexen Widerstandsebene (für Serienschaltung) und der komplexen Leitwertsebene (für Parallelschaltung) wechseln

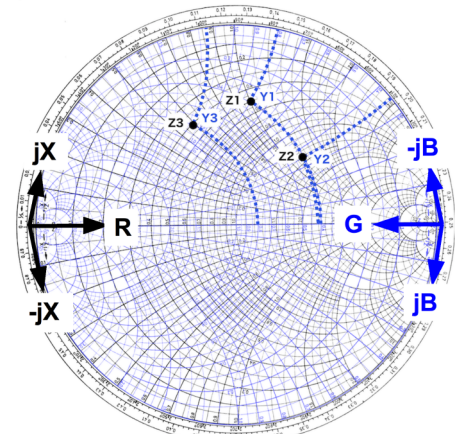
Beispiel Möglichkeit 1: Spiegeln von Punkten im Smith Diagramm

1. Wir tragen Z_1 und Z_2 im Impedanz-Diagramm ein.
2. Wir spiegeln Z_1 und Z_2 am Kreismittelpunkt. Damit erhalten wir die Punkte Y_1 und Y_2 . Wir sind damit in der Leitwertsebene, d.h. an der Achsenbeschriftung des Smith Diagramms lesen wir jetzt die normierten Leitwerte ab.
3. Wir addieren die Wirkleitwerte von Y_1 und Y_2 und die Blindleitwerte, daraus ergibt sich der Punkt $Y_3 = Y_1 + Y_2$.
4. Wir spiegeln den Punkt Y_3 am Kreismittelpunkt. Damit sind wir wieder in der komplexen Widerstandsebene. Der gespiegelte Punkt ist Z_3 , die Impedanz, die sich aus der Parallelschaltung von Z_1 und Z_2 ergibt, und an der Skalenbeschriftung des Smith Diagramms lesen wir die normierten Widerstandswerte ab.



Beispiel Möglichkeit 2: Spiegeln des Diagramms

1. Wir spiegeln das Smith Diagramm selbst an seinem Mittelpunkt. Damit vertauscht sich rechts mit links und oben mit unten. Manche Formulare enthalten bereits das Smith Diagramm der Widerstandsebene in einer Farbe und das Smith Diagramm der Leitwertsebene in einer anderen Farbe eingedruckt. (Beachte: $+jB$ wird hier vom Nullpunkt aus nach unten, $-jB$ nach oben abgetragen.)
2. Wir zeichnen Z_1 als Punkt 1 und Z_2 als Punkt 2 im Impedanz-Diagramm ein.
3. Wenn wir die Koordinaten von Punkt 1 (jetzt Y_1) und Punkt 2 (jetzt Y_2) nun im überlagerten Leitwerstdiagramm ablesen, befinden wir uns in der Leitwertsebene, ohne daß wir die Punkte selbst bewegt haben. Wir addieren die Leitwerte und tragen $Y_3 = Y_1 + Y_2$ als Punkt 3 ein.
4. Nun betrachten wir Punkt 3 (jetzt Z_3) im Impedanzdiagramm und lesen die normierten Impedanzwerte ab.

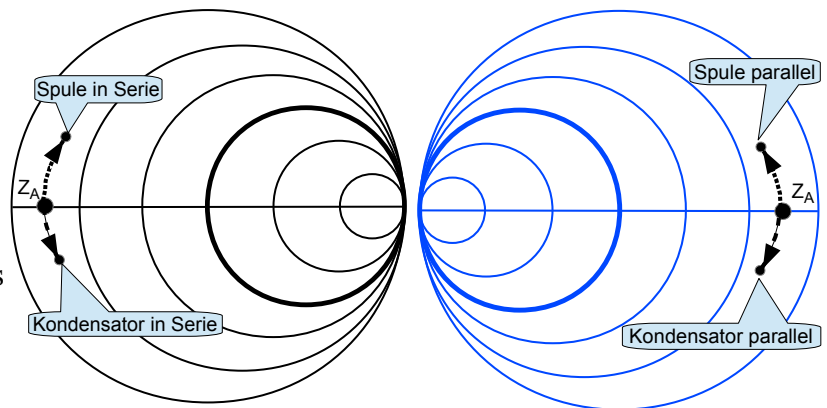


⁴ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{1 \cdot (R-jX)}{(R+jX) \cdot (R-jX)} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} - j \frac{X}{R^2+X^2}$

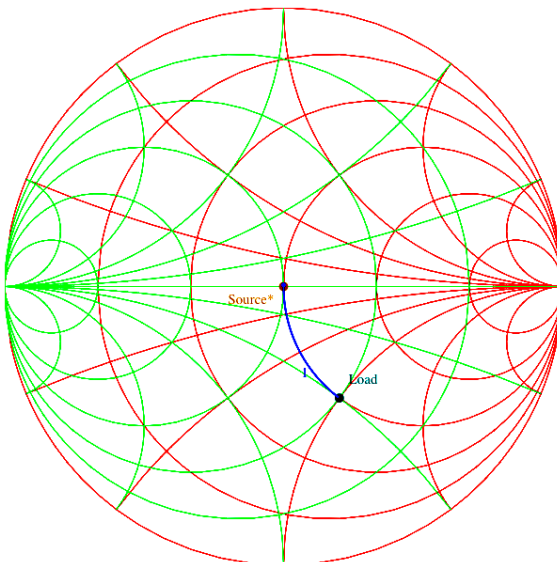
Man erweitert den Bruch also so, daß unten etwas in der Form $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ steht. Außerdem gilt $j \cdot j = -1$

3 Impedanz-Transformation mit Spulen und Kondensatoren

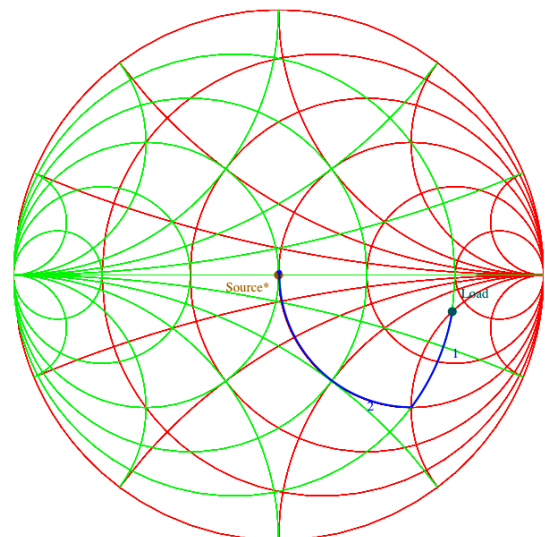
Wegen des frequenzabhängigen Wechselstromwiderstands gilt eine Impedanz-Transformation jeweils für eine Frequenz. Wir gehen von idealisierten Elementen ohne Verlustwiderstände aus, so daß wir uns immer auf den Linien eines konstanten Ohm'schen Widerstands oder eines konstanten Ohm'schen Leitwerts bewegen⁵.



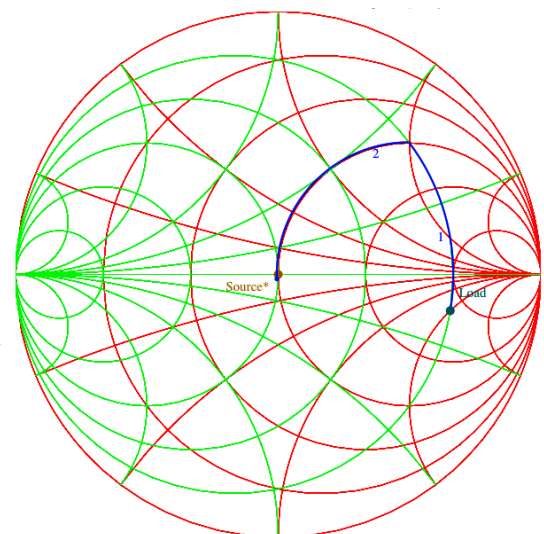
Eine besondere Rolle spielen die Kreise, die durch den Diagramm-Mittelpunkt gehen. Wenn sich eine Impedanz (z.B. die Fußpunktimpedanz einer Antenne) auf einem dieser Kreise befindet, kann man sie in einem Zug zum Kreismittelpunkt transformieren. Andernfalls ist das Ziel, sie zuerst auf einen solchen Kreis zu bringen. Beispiele⁶:



1) Spule in Serie



1) Kondensator parallel
2) Spule in Serie



1) Spule parallel
2) Kondensator in Serie

5 Die Smith Diagramm – Programme nehmen einem die Arbeit der Berechnung der Elemente ab!

Der Wechselstromwiderstand einer Spule ist $Z_L = j\omega L$. Dabei ist die Induktivität L eine Eigenschaft der Spule, und die „Kreisfrequenz“ $\omega = 2\pi f$ (mit $\pi = 3,14$ und mit f = Frequenz in Hz) berücksichtigt die Frequenzabhängigkeit. Beispiel: Mit $L = 500$ nH und $f = 10$ MHz ist $Z_L = j \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-9} = j 31,4 \Omega$, bzw. $z = j 0,628$.

Der Wechselstromwiderstand eines Kondensators: $Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$

Beispiel: Mit $C = 500$ pF, $f = 10$ MHz ist

$$Z_C = -j \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 10^{-12}} = -j 31,8 \Omega$$

bzw. normiert: $z = -j 0,637$

6 Erstellt mit dem Programm „Smith Chart“ für MacOS und IOS von <http://www.microwavemac.com>

Für eine L-Schaltung mit zwei Elementen (Spulen oder Kondensatoren, davon ein Element in Serie und eines parallel geschaltet) gibt es acht verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

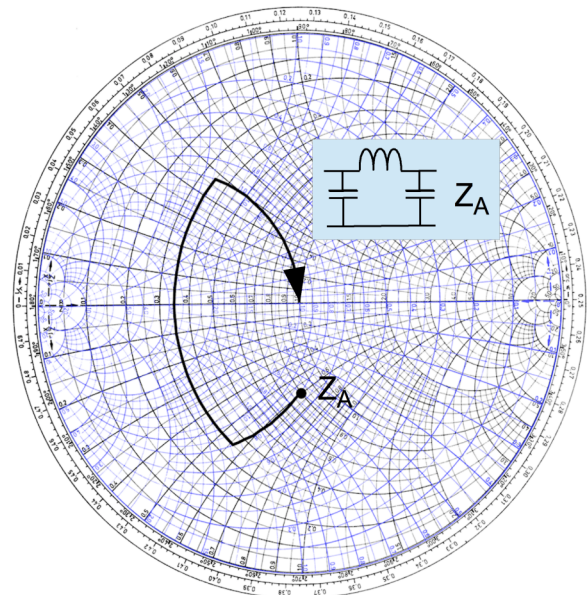
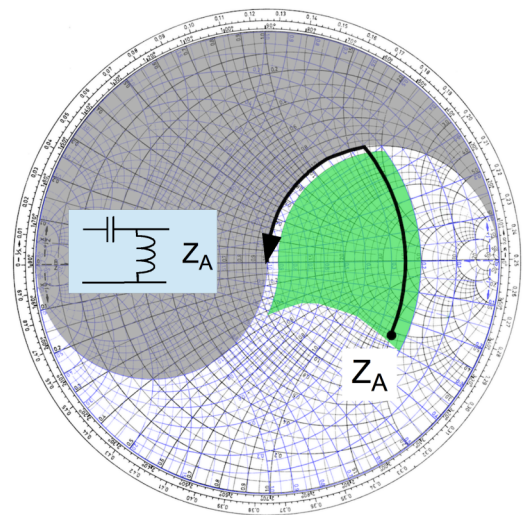
Bei jeder dieser Kombinationen gibt es einen Bereich der Impedanzebene, von dem aus das Zentrum des Smith Diagramms gar nicht erreicht werden kann (im Beispiel grau hinterlegt). Die L-Schaltung eignet sich deshalb zur Anpassung von Antennen, bei denen man erwartet, daß sich ihre Fußpunktimpedanz in einem bestimmten Bereich befindet.

Praktisch ist die Induktivität und Kapazität der Elemente auch nicht von null bis unendlich einstellbar. Dazu kann man im Smith Diagramm einen Impedanzbereich einzeichnen, aus dem heraus mit den konkreten Elementen eine Anpassung erreicht werden kann (als ein Beispiel hier grün hinterlegt). Darüber hinaus ergeben sich Einschränkungen für die Anpassung, wenn Elemente nur in bestimmten Stufen einstellbar sind (z.B. Spulen mit einer festen Anzahl von Abgriffen).

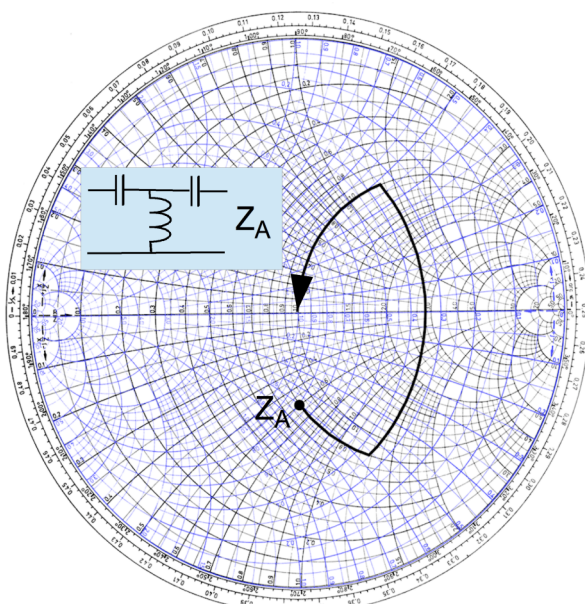
Erst mit drei Elementen (in Pi – Schaltung oder in T - Schaltung) kann man im Prinzip jede Impedanz anpassen.

Beispiele:

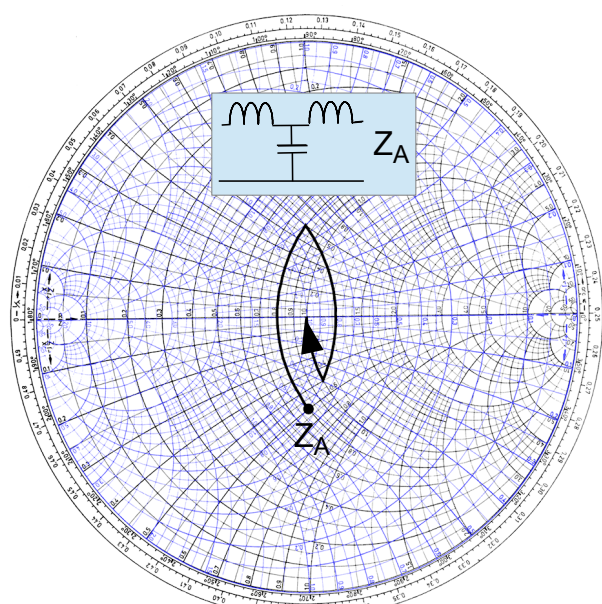
(Um die prinzipiellen Wirkungsmöglichkeiten der Elemente zu zeigen, ist nicht der kürzest mögliche Transformationsweg eingezeichnet.)



Tiefpaß Pi-Schaltung (Collins-Filter)



Hochpaß T-Schaltung



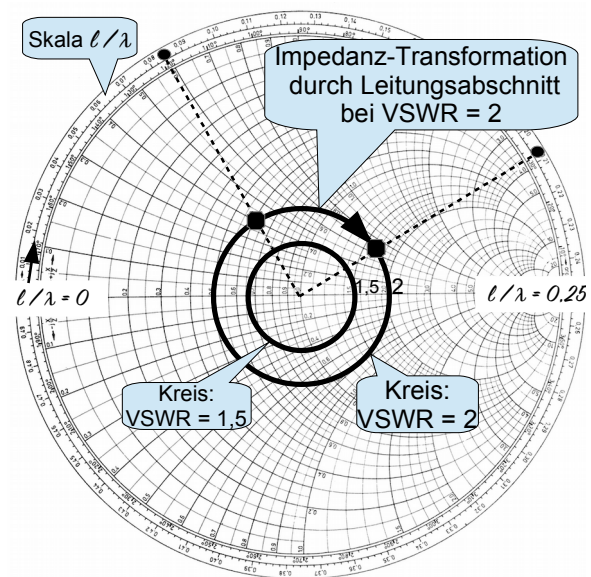
4 Stehwellenverhältnis und Leitungstransformation

Das Smith Diagramm ist die Ebene des Reflexionsfaktors. Reflexionen treten auf, wenn unterschiedliche Impedanzen aufeinandertreffen.

Im Mittelpunkt herrscht vollkommene Anpassung an die Bezugsimpedanz, und die Reflexion ist null. Am Rand des Smith Diagramms ist die Anpassung maximal schlecht, und die Reflexion ist 1, also 100%. Dazwischen, also auf konzentrischen Kreisen um den Mittelpunkt, liegen die Zwischenwerte.

Da das Stehwellenverhältnis (VSWR), das auf einer Leitung auftritt, mit dem Reflexionsfaktor verknüpft ist, sind die Linien konstanten VSWRs konzentrische Kreise um den Mittelpunkt. Den zugehörigen VSWR-Wert liest man an der rechten Hälfte der R-Achse ab.

Das VSWR ist auf der Leitung konstant. Entlang der Leitung ändern sich die elektrischen Verhältnisse also entlang eines Kreises „VSWR = konstant“⁷. Am Rand des Smith Diagramms befindet sich für die elektrische Länge der Leitung⁸ eine Skala „Länge/ λ “.



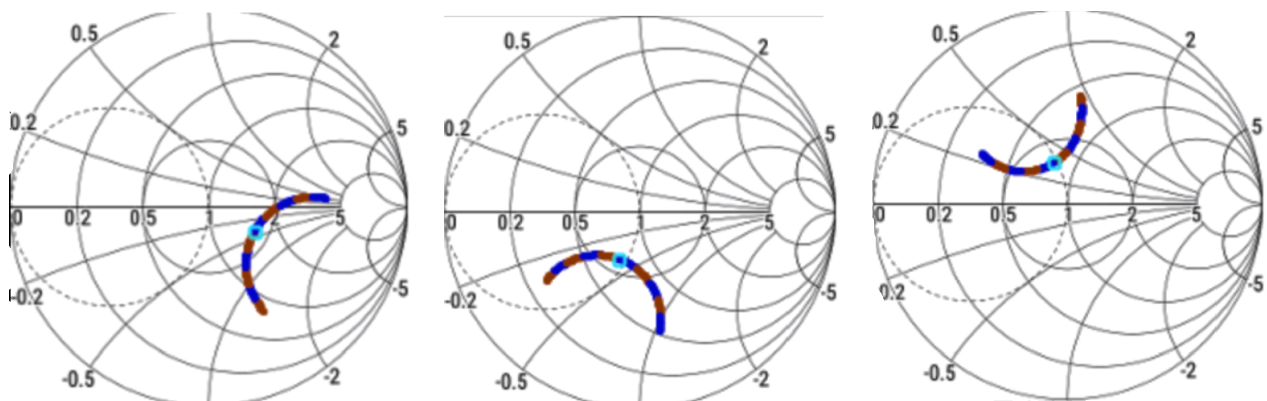
Das VSWR ergibt sich im Smith Diagramm aus dem Abstand zum Kreismittelpunkt

Eine Leitung transformiert die Impedanz entlang eines VSWR-Kreises.

Wenn man von einer an einer Leitung angeschlossenen Impedanz ausgehend die Leitung entlang läuft, bewegt man sich im Smith Diagramm auf dem VSWR-Kreis im Uhrzeigersinn.

Wenn man rückwärts rechnen will, bewegt man sich gegen den Uhrzeigersinn. Beispiel: Messung der Impedanz im Shack, Rückwärts-Rechnung, welche Fußpunkt-Impedanz die Antenne hat.

Die folgenden Bilder zeigen die Impedanz einer Antenne, gemessen nach drei verschiedenen Kabeln (mit zunehmender Kabellänge).



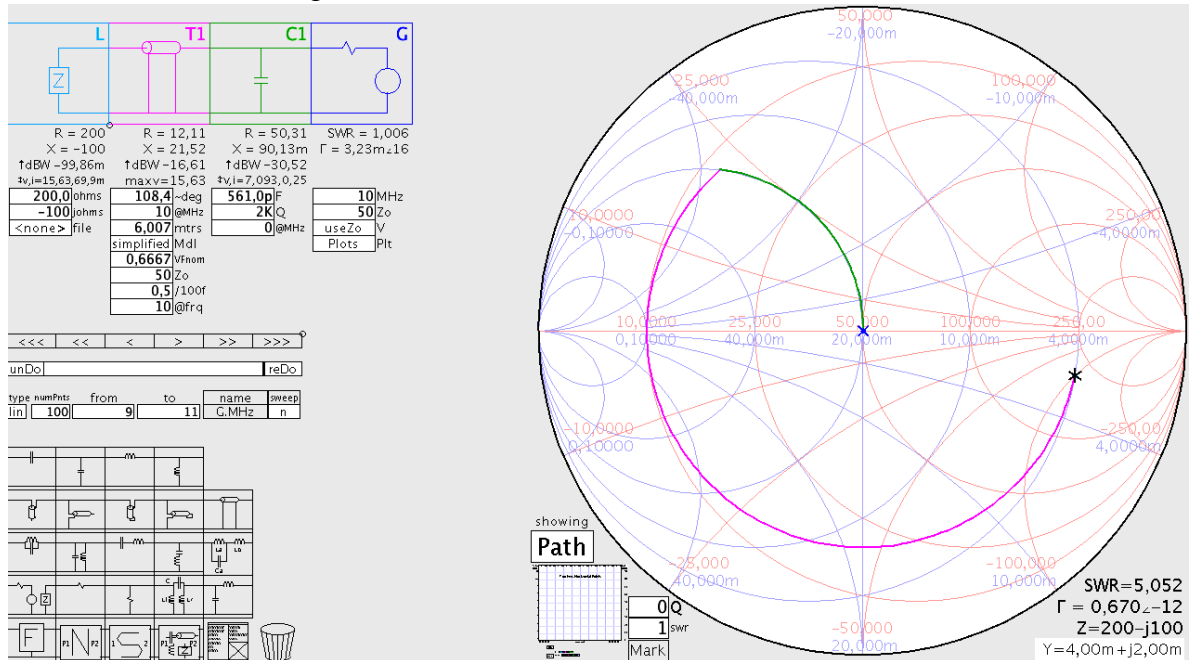
⁷ Bei verlustbehafteten Leitungen, d.h. in der Realität, bewegt man sich auf einer leicht zum Mittelpunkt gerichteten Spirale

⁸ Weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen auf Leitungen kleiner ist als im Vakuum oder in der Luft, muß man auf Leitungen mit einem Verkürzungsfaktor rechnen.

Beispiel: $f = 10 \text{ MHz}$, $\lambda = 30 \text{ m}$. Bei einem Verkürzungsfaktor von 0,66 entsprechen 19,8m Kabel einer Wellenlänge.

Man kann Leitungen auf zwei Arten zur Impedanztransformation verwenden⁹:

- In Kombination mit Kondensatoren oder Spulen: Transformation auf der Leitung entlang eines VSWR-Kreises bis zu dem Punkt, wo man dann z.B. mit einem parallel geschalteten Kondensator zum Mittelpunkt transformieren kann¹⁰.



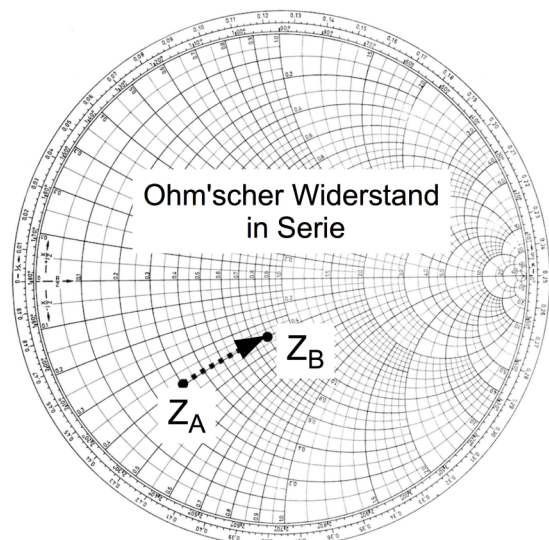
- Leitungsstücke statt diskreter Elemente: Mit einer geeigneten Leitungslänge kann man eine Induktivität oder Kapazität nachbilden.
Eine $\lambda/4$ lange Leitung transformiert bekanntlich einen Kurzschluß in einen Leerlauf, das wäre am Umfang des Smith Diagramm Kreises von „0“ zu „ ∞ “. Mit einer anderen Leitungslänge würden wir den Kurzschluß in einem anderen Blindwiderstand transformieren.

5 Verlustwiderstände

Wenn man einen Ohm'schen Widerstand zu einer Impedanz Z_A in Serie (bzw. parallel) schaltet, bleibt der Blindwiderstand (bzw. Blindleitwert) unverändert, d.h. man bewegt sich auf einer Kurve X (bzw. Y) = konstant.

Im Beispiel ist die Impedanz näher an den Mittelpunkt des Smith Diagramms gewandert, das VSWR ist also gesunken. Die Funktion der Antenne ist aber durch einen Verlustwiderstand nicht besser geworden.

Ein niedriges VSWR ist wünschenswert, es ist aber alleine keine Garantie für eine gute Antenne. (siehe Dummy Load)



9 Bei Verwendung von Leitungen mit unterschiedlichen Wellenwiderständen gibt es weitere Möglichkeiten

10 Beispiel: Programm „SimSmith“ (kostenlos) von www.ae6ty.com/smith_charts.html

SimSmith hat die Besonderheit, daß

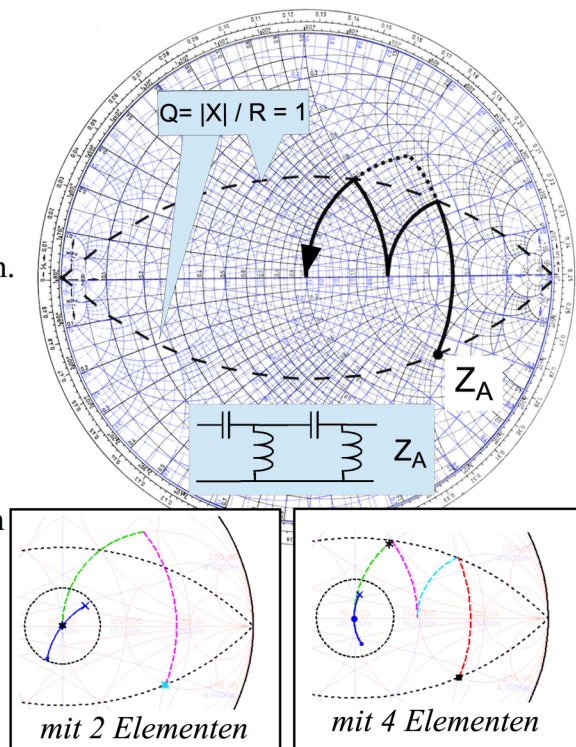
- sich die Last (Load „L“) links und die Quelle (Generator „G“) rechts im Schaltungsdiagramm befinden
- immer die nicht normierten Impedanzen angezeigt werden
- das Programm standardmäßig automatisch auch Verlustwiderstände annimmt

6 Breitbandige Anpassung

Je größer die Blindwiderstände im Vergleich zu den Wirkwiderständen sind, umso größer ist die Frequenzabhängigkeit und damit die Schmalbandigkeit. Dazu kann man einen Faktor Q als „Betrag des Blindwiderstands geteilt durch Wirkwiderstand“ einzeichnen.

Wenn man sich mit der Impedanztransformation innerhalb der von Q gebildeten linsenförmigen Fläche bewegt, dann ist die Transformation umso breitbandiger, je kleiner Q (je dünner die „Linse“) ist.

Im Beispiel ist die Transformation mit vier Elementen etwas breitbandiger als mit zwei. Mit den ersten beiden Elementen wird Z_A auf die R-Achse und näher zum Mittelpunkt transformiert, und mit den anderen beiden Elementen noch weiter zum Mittelpunkt. Zusätzlich zum Transformationsweg für die Nennfrequenz zeigt eine blaue Linie, wie sich der Endpunkt über einen eingestellten Frequenzbereich (Sweep) ändern würde.



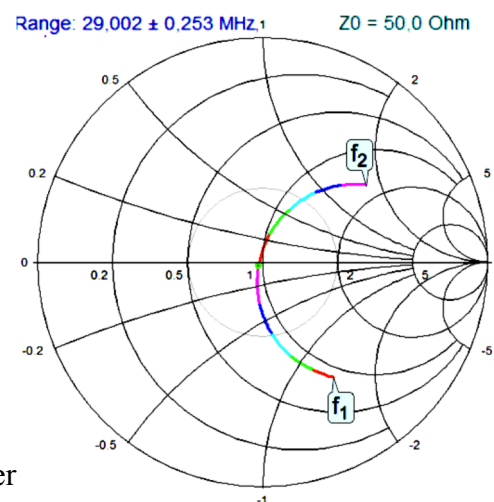
7 Der komplexe Widerstand über einen Frequenzbereich

Das Smith Diagramm eignet sich auch dazu, den Verlauf der Impedanz über einen Frequenzbereich darzustellen (z.B. die Fußpunktimpedanz einer Antenne über ein Amateurband).

Frequenzabhängige Impedanzkurven verlaufen im Smith Diagramm mit steigender Frequenz immer in Schleifen im Uhrzeigersinn¹¹.

Das Smith Diagramm bietet viele Informationen:

- Smith Diagramme lassen sich leicht untereinander vergleichen.
- Aus dem Abstand der Kurve zum Mittelpunkt kann man den Verlauf des VSWRs abschätzen.
- Die Breitbandigkeit einer Antenne lässt sich abschätzen. Je weiter auseinandergezogen die Impedanzkurve ist, die einen bestimmten Frequenzbereich überstreicht, desto schmalbandiger ist die Antenne.
- Man sieht am Schnittpunkt der Impedanzkurve mit der R-Achse, wo Resonanz herrscht.
- Aus der Lage der Impedanzkurve lässt sich erkennen, welche Methode zur Impedanz-Transformation geeignet sein könnte.



Beispiel: Frequenzabhängige Fußpunkt-Impedanz einer schmalbandigen Antenne

Ein Impedanzverlauf über einen bestimmten Frequenzbereich (z.B. mit einem Antennenanalysator ermittelt) kann in einigen Smith Diagramm – Programmen eingelesen werden, und das Programm berechnet dazu das Ergebnis, das eine bestimmte Transformationsschaltung daraus machen würde.

¹¹ Ganz kleine Schleifen können in der grafischen Darstellung zu Spitzen entarten

