

## Kondensatorleitern näher betrachtet

Reinhard Noll, DF1RN

Elektronische Schaltungen mit sich periodisch wiederholenden Elementen, die in einer Reihe hintereinander angeordnet sind, spielen in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. Kettenleiter entstehen, wenn mehrere Vierpole hintereinander geschaltet werden [1]. Beispiele sind das Ersatzschaltbild eines Leitungsabschnitts für die Herleitung der Leitungsgleichungen, ein binäres resistives Leiternetzwerk für die D/A-Wandlung oder die Kaskadierung von Filtern, sogenannte Siebketten [1, 2, 3]. Wir wollen im weiteren die Verkettung einfacher Reaktanzvierpole näher betrachten, die nur aus Kondensatoren besteht.

Eine unendliche Kette von in Serie und parallel geschalteten Kondensatoren zeigt Bild 1. Diese Anordnung wird auch als Kondensatorleiter bezeichnet. Die Berechnung der Eingangskapazität dieser Anordnung wird in der Elektrotechnikausbildung immer wieder als Übungsaufgabe gestellt.

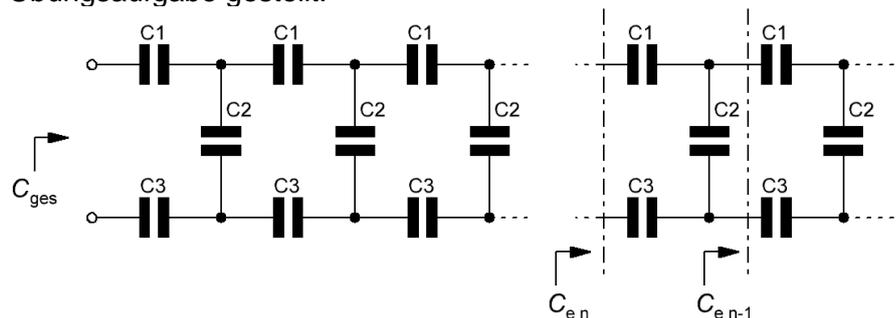


Bild 1: Kondensatorleiter

Um die Kapazität  $C_{ges}$  an den Eingangsklemmen zu ermitteln, wird die unendliche Kette an zwei aufeinanderfolgenden Positionen  $n$  und  $n+1$  aufgetrennt und die Kapazität  $C_{e n}$  rekursiv berechnet:

$$C_{e n} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2 + C_{e n-1}}} \quad (1)$$

mit den Längskapazitäten  $C_1$ ,  $C_3$ , der Querkapazität  $C_2$  und der Kapazität  $C_{e n-1}$  der weiteren Kette. Da angenommen wird, dass die Kondensatorleiter unendlich lang ist, ist die Kette auch hinter der Stufe  $n$  noch unendlich lang und es gilt:

$$C_{e n} = C_{e n-1}. \quad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) führt auf eine quadratische Gleichung für die gesuchte Größe  $C_n$ :

$$C_{e n}^2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) + C_{e n} C_2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) - C_2 = 0. \quad (3)$$

Von den beiden Lösungen kommt nur diejenige in Frage für die  $C_n > 0$  gilt. Mit der Abkürzung  $a = 1/C_1 + 1/C_3$ , lautet diese Lösung:

$$C_{ges} = C_{e n} = \frac{-C_2 a + \sqrt{C_2^2 a^2 + 4C_2 a}}{2a}. \quad (4)$$

Mit der Beziehung (4) kann die gesuchte Eingangskapazität  $C_{ges}$  bei gegebenen  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  berechnet werden. Um die Eigenschaften der Formel (4) zu verdeutlichen, nehmen wir zunächst vereinfachend an, dass  $C_1 = C_3 = C$  gilt und betrachten den Fall einer gegebenen Eingangskapazität  $C_{ges}$  der unendlich langen Kette. Wir beziehen die Leiterkapazitäten auf  $C_{ges}$  und definieren so die dimensionslosen Größen  $c = C/C_{ges}$  und  $c_2 = C_2/C_{ges}$ . Aus (4) folgt dann die einfache Beziehung:

$$c_2 = \frac{2}{c-2}. \quad (5)$$

Aus (5) ist sofort zu erkennen, dass  $c > 2$  gelten muss, damit  $c_2$  positiv ist. Bei einer gegebenen Gesamtkapazität müssen also die Längskapazitäten mindestens doppelt so groß sein wie  $C_{\text{ges}}$ . Die Beziehung (5) zeigt Bild 2. Da die möglichen Wertepaare für Quer- und Längskapazität mehrere Größenordnungen übersteigen können, ist hier eine doppellogarithmische Darstellung gewählt. Deutlich ist zu erkennen, dass für  $c \rightarrow 2$  die Werte der Querkapazität immer größer werden. Der Grenzwert ist als vertikale gestrichelte Linie eingezeichnet.

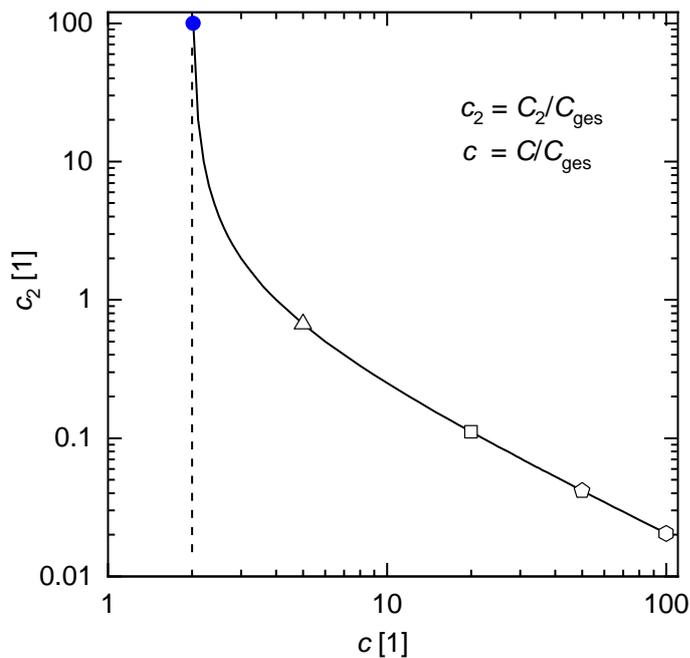


Bild 2: Normierte Querkapazität als Funktion der normierten Längskapazität für eine gegebene Gesamtkapazität der unendlichen Kondensatorleiter  $C_{\text{ges}}$  nach der Beziehung (5).

Die vertikale gestrichelte Linie markiert den unteren Grenzwert für die Längskapazität. Die eingetragenen Datenpunkte entsprechen den in Bild 3 dargestellten Kurven für die ersten fünf Wertepaare von Längs- und Querkapazitäten

Bislang haben wir nur die unendlich lange Kondensatorleiter betrachtet, aber wie verhält sich eine endlich lange Kondensatorleiter? Dazu ist die Beziehung (1) Stufe für Stufe auszuwerten. Bild 2 zeigt das Ergebnis für die normierte Eingangskapazität (auf den Wert der unendlich langen Kondensatorleiter  $C_{\text{ges}}$  nach (4) bezogen) als Funktion der Anzahl der Stufen  $n$  für verschiedene Wertepaare der Längs- und Querkapazität  $(c, c_2)$ . Wir sehen wie sich die Eingangskapazität der Kondensatorkette schrittweise dem Grenzwert bei  $c_{\text{ges}} = 1$  nähert. Dies erfolgt umso schneller, je näher die Längskapazität dem Grenzwert  $c = 2$  kommt.

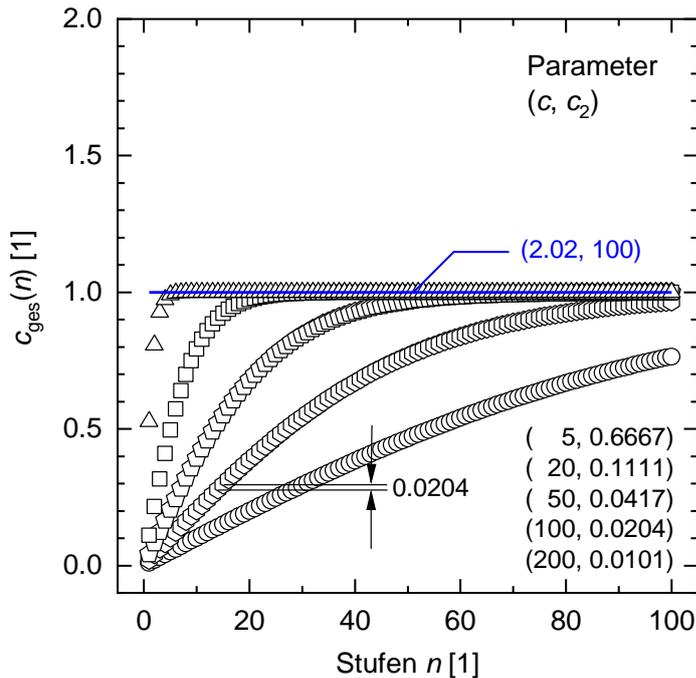


Bild 3: Normierte Eingangskapazität  $c_{ges}(n)$  der Kondensatorleiter als Funktion der Anzahl der Stufen  $n$  für verschiedene Wertepaare der normierten Längs- und Querkapazität  $(c, c_2)$ . Die blaue Linie bei  $c_{ges} = 1$  markiert den Grenzwert für die unendlich lange Kondensatorleiter

Können wir das Verhalten dieser Kurven auch anschaulich deuten? Betrachten wir dazu die Impedanzen der Kondensatoren z.B. bei einem am Eingang eingespeisten Hochfrequenzsignal. Hohe Längskapazitäten in Bild 1 bewirken, dass deren Impedanzen niedrig werden und die Querkapazitäten praktisch parallel geschaltet sind. Mit jeder weiteren Stufe kommt eine Kapazität  $C_2$  hinzu, deren Impedanz viel größer ist als die der Längskondensatoren. Die Eingangskapazität der endlichen Kondensatorleiter sollte also mit den ersten Stufen anfangs näherungsweise linear ansteigen. Das zeigen auch die Kurven in Bild 3. Beispielhaft ist für das Wertepaar  $(c, c_2) = (100, 0.0204)$  eine Stufe eingezeichnet. Sie ist gerade so groß wie eine Querkapazität  $c_2$ . Genauso wie es bei einer sukzessiven Parallelschaltung weiterer  $c_2$  zu erwarten ist.

Sind hingegen die Querkapazitäten viel größer als die Längskapazitäten, so sind praktisch schon nach wenigen Stufen die beiden Längsstränge der Kondensatorleiter kurzgeschlossen. Es wirken dann im wesentlichen die zwei in Serie geschalteten Längskondensatoren der ersten Stufe und die Eingangskapazität erreicht sehr schnell den Wert  $C_{ges} \approx C/2$  (vgl. Wertepaar  $(2.02, 100)$  in Bild 3 und den zugehörigen blauen Datenpunkt in Bild 2).

### Fibonacci-Zahlen und die Kondensatorleiter

Wir betrachten eine Vereinfachung der Kondensatorleiter aus Bild 1 und wählen  $C_1 = C_3 = C = 2C_2$  [4]. Bild 4 zeigt diese Kondensatorleiter mit einer, zwei, drei und  $k$  Stufen. Für die Eingangskapazität der ersten, zweiten und dritten Stufe gilt:

$$\begin{aligned}
 C_{e1} &= \frac{1}{2}(1/2)C, \\
 C_{e2} &= \frac{1}{2}(3/5)C, \\
 C_{e3} &= \frac{1}{2}(8/13)C.
 \end{aligned} \tag{6}$$

In den Brüchen im Klammerausdruck erkennen wir ein einfaches Bildungsgesetz: der Zähler einer Stufe ist gerade so groß wie die Summe aus Zähler und Nenner der vorhergehenden Stufe. Der Nenner ist so groß wie der Zähler der betrachteten Stufe zuzüglich des Nenners der vorherigen Stufe. Dieses Bildungsgesetz entspricht sogenannten Fibonacci-Zahlen:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ mit } F_1 = F_2 = 1. \quad (7)$$

Die ersten Glieder der Fibonacci-Folge sind: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... . Für  $n$  Stufen folgt:

$$C_{e_n} = \frac{1}{2} (F_{2n} / F_{2n+1}) C. \quad (8)$$

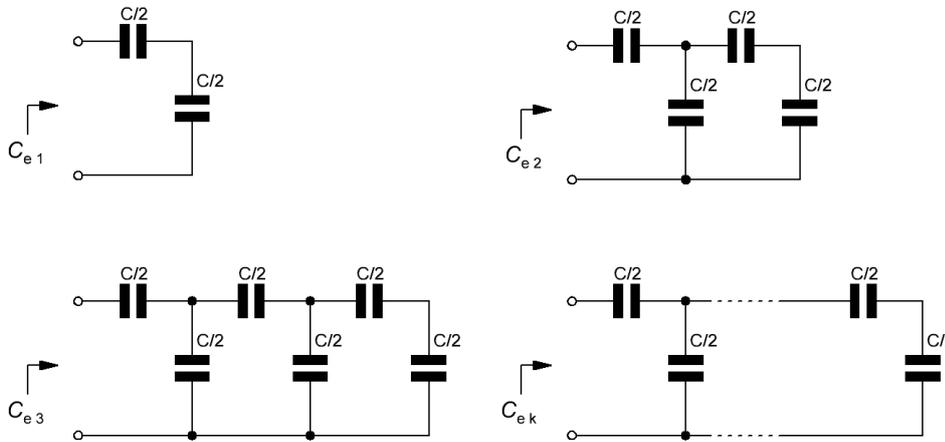


Bild 4:  
Kondensatorleiter bei der die beiden Längskapazitäten gleich groß sind und zu einer Kapazität  $C/2$  zusammengefasst werden. Die Querkapazität beträgt ebenfalls  $C/2$

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  sollte die Eingangskapazität  $C_{e_n}$  den in (4) angegebenen Wert der unendlichen langen Kette annehmen. Setzen wir  $C_1 = C_3 = C$  und  $C_2 = C/2$  ein, so lautet das Ergebnis:

$$C_{\text{ges}} = \frac{C}{2} \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right). \quad (9)$$

Für den Grenzwert zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen sollte also gelten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_{2n} / F_{2n+1}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,61803 \dots \quad (10)$$

Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, da der Kehrwert dieser Zahl gerade dem Goldenen Schnitt entspricht:  $1/0,61803 \dots = 1,61803 \dots$ . Das ist die sogenannte Goldene Zahl. Diesen Grenzwert zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen hat schon Johannes Kepler gefunden. Die betrachtete Kondensatorleiter nach Bild 4 führt uns also von der Elektrotechnik zu den schönen Künsten!

15.2.2020, Reinhard, DF1RN

#### Bezugsdokumente

- [1] K. Küpfmüller, Theoretische Elektrotechnik, Springer-Verlag, 10. Aufl., 1973
- [2] A. Maini, Digital Electronics: Principles, Devices and Applications, John Wiley & Sons Ltd., 2007
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic\\_filter\\_topology#Ladder\\_topologies](https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_filter_topology#Ladder_topologies)
- [4] C. Bender, IEEE Transactions on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications, Vol. 41, 1994, 557-558