

Kondensator-Paradoxon

Reinhard Noll, DF1RN

Auf unseren wöchentlichen Treffen in der Clubstation des DARC, G01, Aachen, hat unser OM Hermann Metzger, DJ8TL, folgendes Problem aufgeworfen.

Problemstellung

Zwei gleich große Kondensatoren sind an an einem Ende miteinander verbunden. Einer der Kondensatoren wird auf eine Spannung u_0 aufgeladen. Der andere ist ungeladen. Die Ladequelle wird vom ersten Kondensator abgeklemmt. Nun wird der erste Kondensator mit dem zweiten Kondensator elektrisch verbunden. Die Energiesituation stellt sich wie folgt dar. Energieinhalt vor dem elektrischen Verbinden der beiden Kondensatoren (i steht für initial):

$$E_{iC1} = \frac{1}{2} C_1 u_0^2, \quad (1)$$

$$E_{iC2} = \frac{1}{2} C_2 \cdot 0 = 0. \quad (2)$$

Wir wollen weiterhin vereinfachend annehmen, dass $C_1 = C_2 = C$ gilt. Die gesamte Energie ist also am Anfang nur in einem Kondensator als elektrische Feldenergie gespeichert. Die gespeicherte Ladung auf diesem Kondensator ist:

$$Q = C u_0. \quad (3)$$

Werden die beiden Kondensatoren nun parallel geschaltet, so verteilt sich diese Ladung zu gleichen Teilen auf die beiden Kondensatoren. Die elektrische Ladung auf einem Kondensator ist also nach dem Verbinden:

$$q = \frac{Q}{2} = C \frac{u_0}{2}. \quad (4)$$

Bei gleicher Kapazität - wie angenommen - halbiert sich nach (4) also die Spannung, die nun an den Kondensatoren vorliegt (f steht für final):

$$u_{fC1} = u_{fC2} = \frac{u_0}{2}. \quad (5)$$

Der Energieinhalt eines Kondensators ist dann:

$$E_{fC1} = \frac{1}{2} C_1 u_{fC1}^2 = \frac{1}{2} C \frac{u_0^2}{4} = \frac{1}{8} C u_0^2. \quad (6)$$

Der gleiche Energieinhalt wie (6) ergibt sich auch für den zweiten Kondensator. Die Gesamtenergie ist also final:

$$E_{f\text{ges}} = 2E_{fC} = \frac{1}{4} C u_0^2. \quad (7)$$

Das ist genau die Hälfte der anfänglich vorhandenen Energie, vgl. (1). Wo ist die andere Hälfte geblieben? Dieses zunächst verblüffende Resultat, bezeichnen wir als das von Hermann vorgebrachte Kondensator-Paradoxon.

Anschauliche Lösung des Paradoxons

Bild 1 zeigt ein Ersatzschaltbild der vorgestellten Aufgabe. Wir nehmen an, dass die Kondensatoren gleich groß sind (nur zur Unterscheidung sind sie hier noch nummeriert), verlustfrei sind und keine Induktivitäten im Schaltkreis vorliegen. Nicht vermeiden lässt sich der ohmsche Widerstand R . Dieser ist zunächst unbekannt und kann auch sehr klein sein.

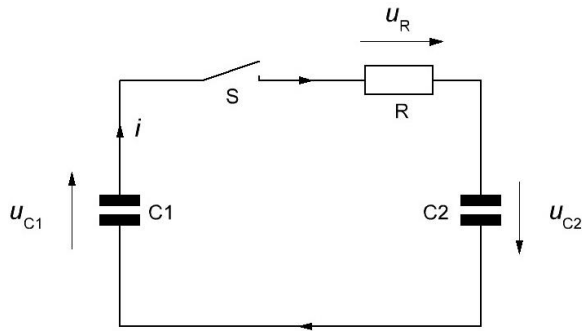


Bild 1 Ersatzschaltbild zum Kondensator-Paradoxon

Wir nehmen stark vereinfachend an, dass nach dem Schließen des Schalters S für eine Zeit T ein konstanter Strom i fließt, der die Ladungen auf den beiden Kondensatoren aneinander angleicht. Dieser Strom hat folgende Größe:

$$i = \frac{Q}{2T} = \frac{Cu_0}{2T} . \quad (8)$$

Durch den Widerstand entsteht in der Zeit T folgender Energieverlust:

$$E_R = Ri^2T = R \frac{C^2u_0^2}{4T^2} T = R \frac{C^2u_0^2}{4T} . \quad (9)$$

Für die Zeit T setzen wir einfach die Zeitkonstante eines RC -Gliedes an:

$$T = RC . \quad (10)$$

Setzen wir (10) in (9) ein, so folgt für die ohmschen Verluste:

$$E_R = R \frac{C^2u_0^2}{4T} = R \frac{C^2u_0^2}{4RC} = \frac{1}{4} Cu_0^2 . \quad (11)$$

Das ist gerade die Hälfte der anfänglich in Kondensator 1 gespeicherten Energie. Die Größe des Widerstands fällt in der Beziehung (11) heraus, dessen Größe muss also nicht bekannt sein. Die im ohmschen Widerstand verloren gegangene Energie ist gerade so groß wie die Energie, die nach dem Ladungsausgleich in den beiden Kondensatoren gespeichert ist, vgl. (7).

Bei dieser einfachen Betrachtung könnte eingewendet werden, dass der Ausgleichsstrom nicht konstant ist und dass die Zeitkonstante (10) ja nur einen Kondensator berücksichtigt.

Genauere Lösung

Wir kommen nicht umhin, die Differentialgleichung zum Ersatzschaltbild aufzustellen und zu lösen (siehe Anhang A1). Sind die beiden Kondensatoren gleich groß, so wird der Zeitverlauf des Stroms durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$i(t) = i_0 e^{-t/(RC/2)} . \quad (12)$$

Die Größe i_0 ist der Anfangsstrom zur Zeit $t = 0$. Ist der Kondensator C_1 zu dieser Zeit auf die Spannung u_0 geladen und der Kondensator C_2 ungeladen, so gilt kurz nach dem Schließen des Schalters:

$$i_0 = \frac{u_0}{R} . \quad (13)$$

Für die Zeitkonstante im Exponenten von (12) nehmen wir die Abkürzung: $\tau = RC/2$. Für die nach unendlich langer Zeit geflossene Ladung müssen wir über den Zeitverlauf des Stroms (12) integrieren, Ergebnis:

$$q_{t \rightarrow \infty} = \frac{u_0}{R} \tau = \frac{u_0 C}{2} = \frac{Q}{2}. \quad (14)$$

Das Ergebnis (14) ist plausibel, bei gleich großen Kondensatoren fließt gerade die Hälfte der anfänglich auf C_1 vorhandenen Ladung ab.

Die momentan im Widerstand umgesetzte Leistung ist $Ri^2(t)$. Betrachten wir dies für den gesamten Ausgleichsvorgang (siehe Anhang A2) so gilt für die gesamten im Widerstand auftretenden ohmschen Verluste:

$$E_R = Ri_0^2 \frac{\tau}{2} = \frac{1}{4} Cu_0^2. \quad (15)$$

Nach dem Ausgleichsvorgang ist also gerade die Hälfte der anfänglich gespeicherten Energie als ohmscher Verlust aufgetreten. Der Energiesatz ist also - wie zu erwarten - erfüllt und ein Kondensator-Paradoxon gibt es eben doch nicht!

Zusätzliche Berücksichtigung einer Induktivität

Bisher haben wir angenommen, dass kurz nach Schließen des Schalters S in Bild 1 der Strom den Wert entsprechend Gleichung (13) annimmt. Dazu müsste der Strom zur Zeit $t = 0$ in unendlich kurzer Zeit von null auf den Wert i_0 springen. Das kann aus physikalischen Gründen aber nicht sein, da jede Leitungsverbindung auch eine Induktivität aufweist, die den Stromanstieg begrenzt. Wir erweitern daher das Schaltbild nach Bild 1 um eine Induktivität, siehe Bild 2. Vereinfachend nehmen wir an, dass diese Induktivität verlustfrei ist. Am grundsätzlichen Verhalten sollte sich also nichts ändern. Der Strom wird nunmehr jedoch auch oszillieren können.

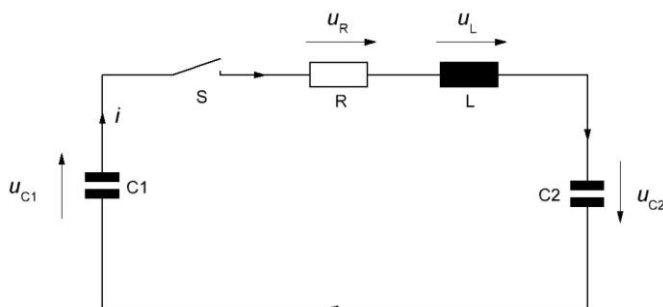


Bild 2 Schaltbild mit zwei Kondensatoren, einem Widerstand und einer Induktivität

Die Analyse dieser Schaltung liefert für schwache Dämpfung folgende Lösung (siehe Anhang A3):

$$i(t) = -\frac{u_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t), \quad (16)$$

mit den Abkürzungen:

$$\delta = \frac{R}{2L}, \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC/2}}. \quad (17)$$

Die Beziehung (16) beschreibt einen oszillierenden Strom der exponentiell mit der Zeit abfällt und nach unendlich langer Zeit gegen null geht. Weiterhin zeigt (16) für $t \rightarrow 0$ ein plausibles Verhalten: $i(t=0) = 0$, der Strom startet also bei null mit einer endlichen Steigung. Für sehr kleine Zeiten gilt folgende Näherung für (16):

$$i(t) \approx -\frac{u_0}{\omega_e L} \omega_e t = -\frac{u_0}{L} t. \quad (18)$$

Der Strom steigt am Anfang also linear mit der Zeit an und zwar umso schneller, je höher die Ladespannung und je geringer die Induktivität ist.

Die Berechnungen der Spannungen an den Kondensatoren beim Stromverlauf nach (16) zeigt wieder, dass nach unendlich langer Zeit an beiden Kondensatoren die Spannung $u_0/2$ anliegt

(siehe Anhang A3). Diese ist wieder gerade halb so groß, wie die anfängliche Spannung an C_1 . Die Ladung ist also erhalten geblieben, sie hat sich auf die beiden Kondensatoren zu gleichen Teilen verteilt.

Für die Berechnung der ohmschen Verluste wird wieder die Momentanleistung im Widerstand über den gesamten Entladevorgang integriert mit dem Ergebnis:

$$E_R = \frac{1}{4} C u_0^2. \quad (19)$$

Das ist wieder das Ergebnis von (15), gerade die Hälfte der anfänglich in C_1 gespeicherten Energie geht verloren.

Erst mit Berücksichtigung einer Induktivität erhalten wir eine physikalische sinnvolle Beschreibung des Verhaltens beim Ladungsausgleich zwischen den Kondensatoren mit einem endlichen Stromanstieg am Beginn ausgehend vom Strom null. Wie schon bei den einfacheren Betrachtungen gezeigt, geht die Hälfte der anfänglich gespeicherten Energie durch ohmsche Verluste verloren. Dabei spielt die Größe des Widerstands R *keine* Rolle. Die verlustfreie Induktivität führt zu einer Oszillation des Ausgleichstroms, speichert periodisch magnetische Energie und gibt diese wieder ab, bis nach unendlich langer Zeit nur die elektrostatische Feldenergie in den beiden Kondensatoren zu gleichen Teilen verbleibt.

Kondensatoren im Vakuum

Wir könnten uns die gestellte Aufgabe auch ohne einen ohmschen Widerstand vorstellen, wenn wir z.B. annehmen, dass sich beide Kondensatoren im Vakuum befinden, siehe Bild 3. Wir lösen aus dem oberen Anschluss des Kondensators C_1 eine kleine Ladungsmenge q aus. Diese bewegt sich – ohne Stöße wegen des angenommenen Vakuums – zur oberen Elektrode des Kondensators C_2 , da dieser anfangs die Spannung null hat. Durch den Ladungstransport sinkt die Spannung an C_1 mit jeder übergehenden Ladung q und die an C_2 steigt entsprechend schrittweise an. Das geht solange, bis zwischen den oberen Anschlüssen der Kondensatoren keine Spannungsdifferenz mehr vorliegt und die Ladung auf beide Kondensatoren gleich verteilt ist (wieder mit der Annahme $C_1 = C_2$).

Wenn eine Ladung q ein Potentialgefälle – das ist gerade die Spannungsdifferenz zwischen den oberen Anschlüssen der Kondensatoren C_1 und C_2 – durchläuft, so nimmt sie im Vakuum kinetische Energie auf. Nach dem Energiesatz gilt:

$$[u_{C1} - u_{C2}]q = \frac{1}{2} m v^2. \quad (20)$$

Wenn die Ladung q auf der oberen Elektrode von C_2 liegen bleiben soll, dann muss diese kinetische Energie vollständig beim Auftreffen der Ladung verloren gehen, damit ihre Geschwindigkeit wieder null wird. Wir haben also keinen ohmschen Widerstand, sondern bei diesem Gedankenexperiment nur Abbremsverluste.

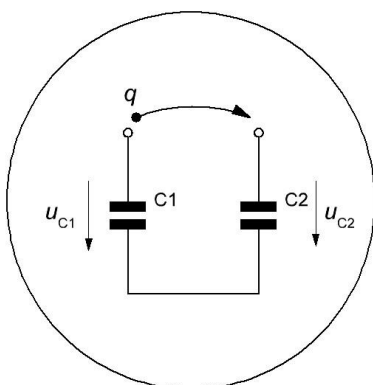


Bild 3 Zwei Kondensatoren in einem Vakuumgefäß (hier schematisch als Kreis dargestellt). Von der oberen Elektrode des geladenen Kondensators C_1 bewegt sich eine infinitesimal kleine Ladung q durch das Vakuum zum zweiten Kondensator

Die gesamten Abbremsverluste können wir berechnen (siehe Anhang A4), sie betragen: $\frac{1}{4}Cu_0^2$.

Das entspricht wieder genau dem Ergebnis von (15) und (19)! Ob wir ein elektrisches Ersatzschaltbild mit einem unvermeidlichen endlichen ohmschen Widerstand wählen oder wir machen ein Gedankenexperiment im Vakuum, immer geht die Hälfte der anfänglich in C_1 gespeicherten Energie verloren.

Mechanisches Analogon

Wir betrachten dazu den vollständig inelastischen Stoß zweier Kugeln, siehe Bild 4.

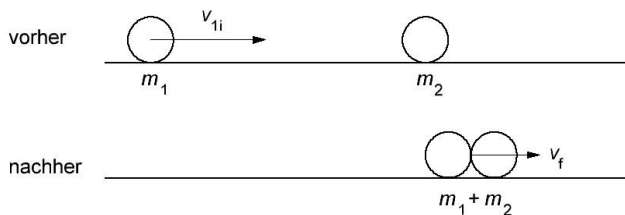


Bild 4 Inelastischer Stoß zweier Kugeln

Kugel 1 bewege sich anfänglich mit v_{1i} (i initial), ihre Masse sei m_1 . Kugel 2 ruht und hat die Masse m_2 . Beide Massen sollen gleich groß sein: $m_1 = m_2 = m$. Nach dem Stoß bewegen sich beide Kugeln gemeinsam weiter (Kugel 1 "klebt" an Kugel 2, das entspricht einem inelastischen Stoß). Nach dem Impulssatz gilt:

$$mv_{1i} = 2mv_f. \quad (21)$$

Die Geschwindigkeit der beiden Kugeln ist nach dem Stoß gerade halb so groß wie die Geschwindigkeit der Kugel 1 vor dem Stoß.

Die kinetische Energie der Kugel 1 vor dem Stoß ist (Kugel 2 ruht und hat daher keine kinetische Energie):

$$E_{\text{kin } 1i} = \frac{1}{2}mv_{1i}^2. \quad (22)$$

Nach dem Stoß ist die kinetische Energie der sich gemeinsam bewegenden beiden Kugeln:

$$E_{\text{kin } f} = \frac{1}{2}2mv_f^2 = m\left(\frac{v_{1i}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_{1i}^2. \quad (23)$$

Die Beziehung (23) zeigt, dass gerade die Hälfte der anfänglich vorhandenen Energie im inelastischen Stoß verloren gegangen ist. Diese Energie steckt letztendlich in einer Erwärmung des fiktiven Klebers zwischen den beiden Kugeln. Das Kondensator-Paradoxon hat also ein mechanisches Pendant: den vollständig inelastischen Stoß.

Experimente zur Kondensatorumladung

Bild 5 zeigt den Aufbau der für das Experiment mit einem Steckbrett und Klingeldrahtleitungen realisiert wurde. Zunächst sind die Schalter S2 und S3 geschlossen und S1 ist offen. Beide Kondensatoren werden entladen. Sodann wird S2 und S3 geöffnet und S1 geschlossen. Der Kondensator C_1 wird mit einem Labornetzteil auf die Spannung $u_0 = (1 \pm 0,05)$ V aufgeladen. Dann wird S1 geöffnet. Das an C_1 angeschlossene Oszilloskop Siglent 2204X im single sweep Modus auf die fallende Flanke getriggert (DC Kopplung). Als Kapazität werden für einen ersten Versuch beide Kondensatoren zu jeweils 100 μF gewählt (Elektrolytkondensatoren).

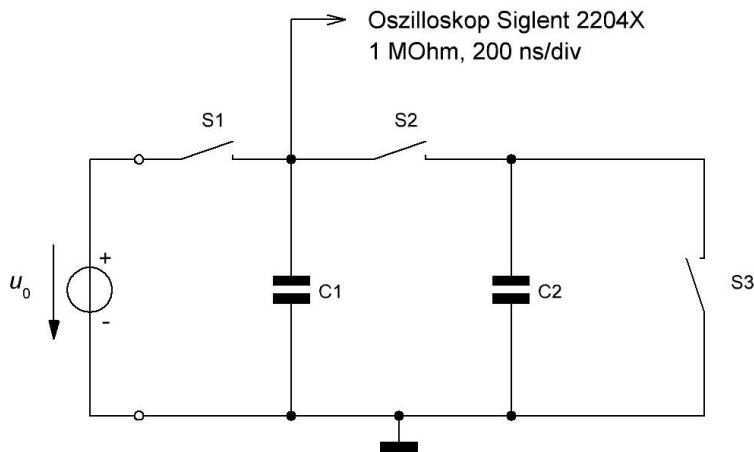


Bild 5 Experiment zur Kondensatorumladung

Bild 6 zeigt das Ergebnis, wenn der Schalter S2 geschlossen wird.

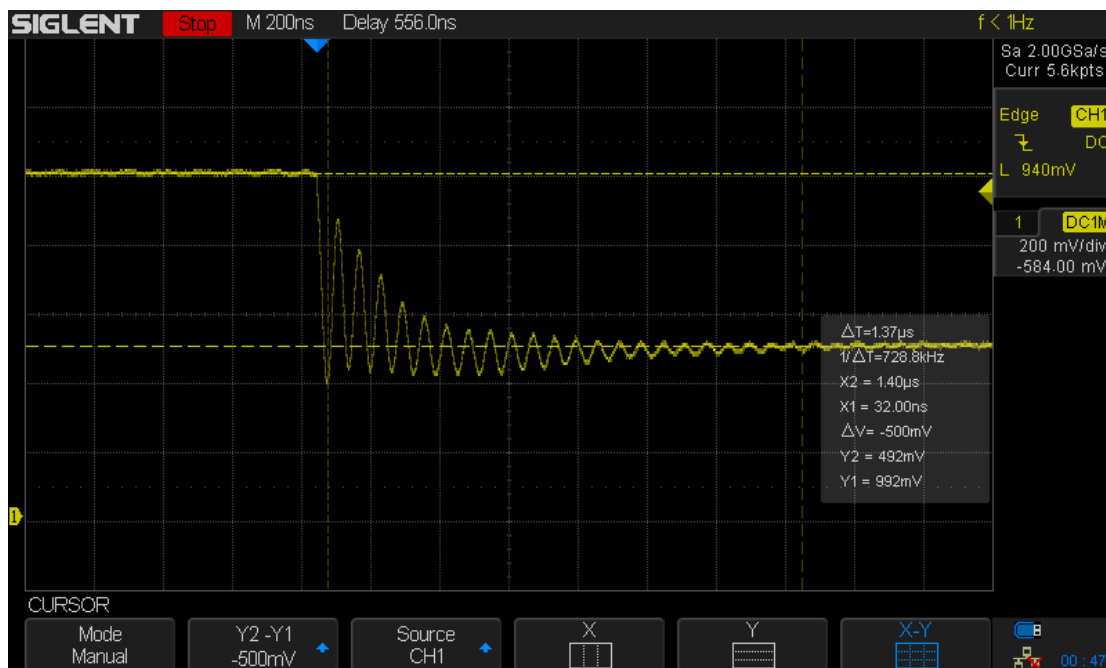


Bild 6 Oszillogramm der Spannung an C1 für $C_1 = C_2 = 100 \mu\text{F}$

Die Spannung fällt mit einer abklingenden Oszillation von 1 V auf 500 mV ab. Da die beiden Kondensatoren gleich groß sind, verteilt sich die zunächst nur bei C1 vorhandene Ladung zu gleichen Teilen auf C1 und C2, die Spannung ist daher nach dem Ladungsausgleich halb so groß.

Über 22 Perioden verstreicht eine Zeit von $1.37 \mu\text{s}$ (siehe Cursormarkierungen im Oszillogramm und ΔT). Die Periodendauer der Oszillation beträgt damit 62.27 ns . Dies entspricht einer Frequenz von 16.1 MHz .

Die Induktivität der Drahtschleife des Kreises bestehend aus C1, S2, C2 und den Leitungsverbindungen, läßt sich wie folgt abschätzen:

$$L_S = \mu_0 r \left(\ln \left(\frac{8r}{a} \right) - 2 + Y \right) \quad (24)$$

mit μ_0 magnetische Feldkonstante, r Schleifenradius, a Drahtradius. Die Größe Y ist gleich 0, wenn der Strom gleichmäßig über die Drahtoberfläche verteilt ist und gleich 0.5, wenn der Strom gleichmäßig über den Drahtquerschnitt verteilt ist. Bei einer Frequenz von 16 MHz beträgt die Eindringtiefe in eine Kupferleitung ca. $17 \mu\text{m}$. Wir setzen daher für die weitere Rechnung $Y = 0$. Für

$r = 6 \text{ cm}$, $a = 0.3 \text{ mm}$, erhalten wir: $L_S \approx 405 \text{ nH}$. Die Induktivität der beiden Elektrolytkondensatoren habe ich mit dem vektoriellen Netzwerkanalysator VNWA (v2, SDR-Kits) bei 16 MHz gemessen, sie beträgt jeweils $L_C \approx 26 \text{ nH}$. Damit ist die Gesamtinduktivität

$L_{ges} = L_S + 2L_C \approx 457 \text{ nH}$. Um eine Frequenz von 16.1 MHz zu erzeugen, müsste nach der Thomsonschen Schwingungsformel eine Kapazität von $C = 1/(\omega^2 L_{ges}) \approx 215 \text{ pF}$ vorliegen. Die Elektrolytkondensatoren wirken bei diesen Frequenzen offensichtlich nur als Induktivitäten. Woher könnten die 215 pF kommen?

Von der Eingangskapazität des Oszilloskops und der Anschlussleitung kommen zusammen ca. 120 pF (22 pF Eingangskapazität des Oszilloskops zzgl. ca. 100 pF über die Anschlussleitungen; die 120 pF sind mit dem VNWA bei 16.1 MHz bestimmt worden). Die Kapazität des Schalters S2 im geöffneten Zustand liegt bei 4.3 pF. Kurz vor dem Schließen, wenn die Kontakte sich nähern, wird diese sicher stark ansteigen. Insgesamt ist also davon auszugehen, dass die in Bild 6 beobachtete Schwingung auf einen parasitären Schwingkreis zurückzuführen ist, bei dem die Kapazitäten der Kondensatoren C1 und C2 keine Rolle spielen.

In einem zweiten Versuch wurden für C1 und C2 Folienkondensatoren (Aufschrift: WIMA 1 μ 50) mit jeweils 1 μF eingesetzt. Für diese Messung wurde die Spannung am oberen Anschluss von C2 erfasst (sonst würde die anfängliche Ladespannung an C1 aufgrund des 1 M Ω Eingangswiderstands des Oszilloskops innerhalb kurzer Zeit nach dem Öffnen von S1 stark abfallen, bevor der Schalter S2 geschlossen werden kann). Bild 7 zeigt das Ergebnis.

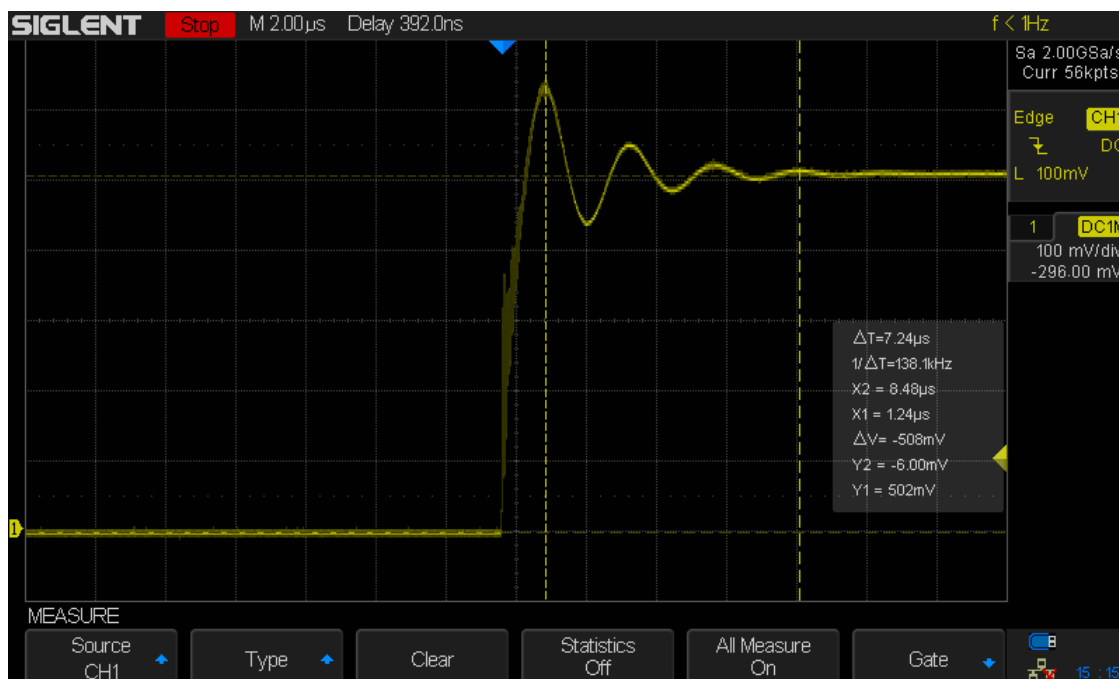


Bild 7 Oszillogramm der Spannung an C2 für $C1 = C2 = 1 \mu\text{F}$

Nach einer abklingenden Oszillation, steigt die Spannung an C2 auf den erwarteten Pegel von ca. 500 mV an. Die Periodendauer der Oszillation beträgt 2.41 μs , entsprechend einer Frequenz von 414 kHz. Offensichtlich wirken im Falle der Folienkondensatoren diese tatsächlich mit ihrer nominalen Kapazität. Setzen wir $C1 = C2 = C$, so erhalten wir mit der Thomsonschen Schwingungsgleichung für die Induktivität (Faktor 2 berücksichtigt die Serienschaltung der beiden Kondensatoren):

$$L = \frac{2}{\omega^2 C} . \tag{25}$$

Damit ergibt sich für die Induktivität: $L = 295 \text{ nH}$. Diese liegt in der Größenordnung der abgeschätzten Induktivität der Drahtschleife mit C1, S2 und C2. Um den Einfluß der Schleifeninduktivität

zu untersuchen, habe ich im nächsten Versuch die Drahtverbindung vom oberen Anschluss von C1 zum Schalter in ihrer Länge in etwa verdoppelt. Das Messergebnis zeigt Bild 8.

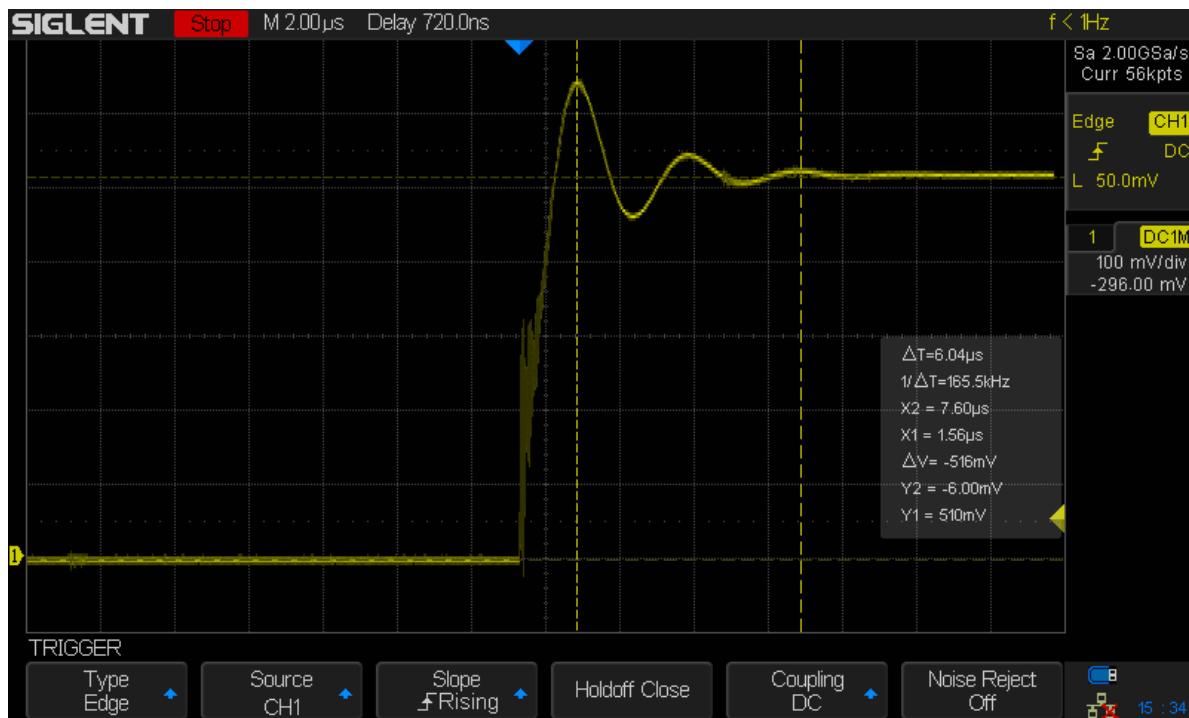


Bild 8 Oszillogramm der Spannung an C2 für C1 = C2 = 1 μ F mit vergrößerter Drahtschleife

Die Zeitdauer für zwei Schwingungen, siehe ΔT der beiden vertikalen Cursorsmarkierungen in Bild 8, beträgt 6.04 μ s, die zugehörige Frequenz also 331 kHz. Die Abschätzung der Induktivität mit der Beziehung (25) führt auf $L = 462$ nH.

Direkt nach dem Anstieg des Signals in Bild 7 und Bild 8 ist eine schnelle Oszillation zu sehen (links des ersten vertikalen Cursors). Bild 9 zeigt diese im Detail mit größerer Zeitablenkung.

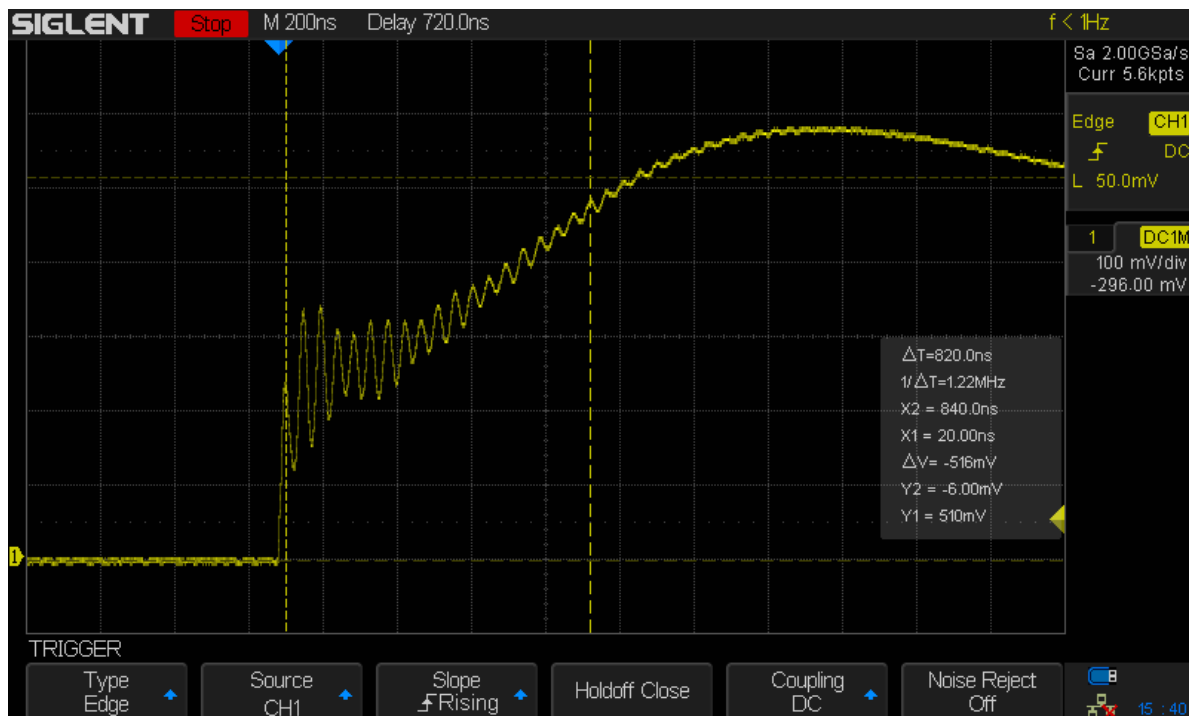


Bild 9 Schnelle Oszillation am Anfang des Signals von Bild 7 und Bild 8

Die Oszillationsfrequenz liegt bei 21.95 MHz und entspricht der parasitären Schwingung, wie sie auch schon in Bild 6 beobachtet wurde. Ein erneuter genauere Blick auf Bild 2 zeigt, dass diese schnelle Oszillation der langsameren Ausgleichsschwingung durch den Ladungsausgleich zwischen C1 und C2 überlagert ist. Letztere ist im ersten Experiment so stark bedämpft, dass ein aperiodischer Grenzfall vorliegt und sich keine vollständige Schwingung mehr ausbildet, die in Bild 7 und 8 zu sehen ist.

Fazit

Ausgleichsvorgänge zwischen geladenen und ungeladenen Kapazitäten, die praktisch bei allen Schaltvorgängen auftreten, führen immer zu Verlusten unabhängig davon, wie groß ohmsche Widerstände im betrachteten Schaltkreis sind. Bei gleich großen Kapazitäten geht immer die Hälfte der anfänglich gespeicherten Energie verloren. Die Ausgleichsvorgänge lassen sich durch einen bedämpften Schwingkreis vollständig beschreiben. Dessen Induktivität – auch wenn diese allein durch die Leitungsverbindungen gegeben ist – begrenzt den Stromanstieg bei einem Schaltvorgang auf einen endlichen Wert.

Ein Ladungsausgleich ist ein irreversibler Vorgang, die auftretenden Verluste sind völlig analog zu denjenigen beim inelastischen Stoß zweier Kugeln gleicher Masse in der klassischen Mechanik. Auch hier geht gerade die Hälfte der anfänglich vorhandenen kinetischen Energie verloren.

Im Experiment sind die oszillierenden Ausgleichsvorgänge bestimmt durch die verwendeten konzentrierten Kapazitäten und die Induktivität der Leitungsverbindungen im Allgemeinen überlagert mit weiteren Oszillationen, die aufgrund von Ausgleichsvorgängen durch die angeschlossenen Messmittel zustande kommen.

29.11.2020, Reinhard Noll, DF1RN

Anhang

A1

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt:

$$u_{C1} + u_R + u_{C2} = 0. \quad (\text{A1.1})$$

Für die Spannungen an den Komponenten gilt:

$$i = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, i = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, u_R = Ri. \quad (\text{A1.2})$$

Wir differenzieren (A1.1) nach der Zeit und verwenden die Beziehungen (A1.2). Für die zeitliche Ableitung des Stroms benutzen wir die Bezeichnung: $i' = di/dt$.

$$\frac{i}{C_1} + Ri' + \frac{i}{C_2} = 0. \quad (\text{A1.3})$$

Setzen wir $C_1 = C_2 = C$, so folgt nach einer Umstellung von (A1.3):

$$i' = -\frac{2}{RC}i. \quad (\text{A1.4})$$

Diese Differentialgleichung ersten Grades besitzt folgende Lösung:

$$i(t) = i_0 e^{-t/(RC/2)}.$$

A2

$$E_R = \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt = Ri_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = Ri_0^2 \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\infty} = Ri_0^2 \frac{\tau}{2} = \frac{Ru_0^2 RC}{R^2 4} = \frac{1}{4} Cu_0^2 \quad (\text{A2.1})$$

A3

Nach der Maschenregel erhalten wir nun:

$$u_{C1} + u_R + u_L + u_{C2} = 0 \quad (\text{A3.1})$$

Für die Spannung an der Induktivität gilt bei den gewählten Zählpfeilrichtungen:

$$u_L = Li' \quad (\text{A3.2})$$

wobei i' wieder die zeitliche Ableitung des Stroms bezeichnet. Für die Differentialgleichung erhalten wir so in Analogie zu (14):

$$\frac{i}{C_1} + Ri' + Li'' + \frac{i}{C_2} = 0 \quad (\text{A3.3})$$

Wir stellen diese in folgende Form um:

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{2}{LC}i = 0 \quad (\text{A3.4})$$

mit dem schon zuvor gewählten Ansatz: $C_1 = C_2 = C$. Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiten Grades ist bekannt. Für den Fall schwacher Dämpfung ($\delta < \omega_0$) gilt:

$$i(t) = -\frac{u_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t), \quad (\text{A3.5})$$

mit den Abkürzungen:

$$\delta = \frac{R}{2L}, \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC/2}}. \quad (\text{A3.6})$$

Wir berechnen als nächstes den Spannungsverlauf am Kondensator C_1 :

$$\begin{aligned}
u_{C_1}(t) - u_{C_1}(0) &= \int_0^t \frac{i}{C_1} dt = -\frac{u_0}{\omega_e LC_1} \int_0^t e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) dt = -\frac{u_0}{\omega_e LC_1} \left[\frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega_e^2} (-\delta \sin \omega_e t - \omega_e \cos \omega_e t) \right]_0^t \\
&\dots = -\frac{u_0}{\omega_e LC_1} \left[\frac{e^{-\delta t}}{\omega_0^2} (-\delta \sin \omega_e t - \omega_e \cos \omega_e t) + \frac{\omega_e}{\omega_0^2} \right] \quad (\text{A3.7})
\end{aligned}$$

Für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir:

$$u_{C_1}(t \rightarrow \infty) - u_{C_1}(0) = -\frac{u_0}{\omega_0^2 LC_1} = -\frac{u_0 LC / 2}{LC_1} = -\frac{u_0}{2} \quad (\text{A3.8})$$

Die Spannung am Kondensator C_1 sollte am Anfang $u_{C_1}(0) = u_0$ sein, also erhalten wir:

$$u_{C_1}(t \rightarrow \infty) = u_{C_1}(0) - \frac{u_0}{2} = \frac{u_0}{2}. \quad (\text{A3.9})$$

Die Spannung sinkt also nach unendlich langer Zeit auf $u_0/2$ ab, wie wir es schon bei (5) erhalten hatten. Für den Kondensator C_2 gilt eine analoge Beziehung wie (A3.8):

$$u_{C_2}(t \rightarrow \infty) - u_{C_2}(0) = -\frac{u_0}{\omega_0^2 LC_2} = -\frac{u_0 LC / 2}{LC_2} = -\frac{u_0}{2} \quad (\text{A3.10})$$

Der Anfangswert ist jedoch hier $u_{C_2}(0) = 0$, daher folgt aus (A3.10):

$$u_{C_2}(t \rightarrow \infty) = -\frac{u_0}{2}. \quad (\text{A3.11})$$

Also gilt mit (A3.8), (A3.11):

$$u_{C_1}(t \rightarrow \infty) + u_{C_2}(t \rightarrow \infty) = 0. \quad (\text{A3.12})$$

Das ist die zu erwartende Maschengleichung für die Schaltung nach Bild 2, wenn nach unendlich langer Zeit der Strom verschwindet.

Für die ohmschen Verluste berechnen wir in Analogie zu (A2.1), jetzt jedoch mit dem Strom nach der Beziehung (16):

$$E_R = \int_0^\infty Ri^2(t) dt = R \frac{u_0^2}{\omega_e^2 L^2} \int_0^\infty e^{-2\delta t} \sin^2(\omega_e t) dt. \quad (\text{A3.13})$$

Die Lösung des Integrals ist weiter unten dargestellt. Wir erhalten schließlich (mit (17)):

$$E_R = R \frac{u_0^2}{\omega_e^2 L^2} \frac{1}{4\delta} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} = R \frac{u_0^2}{L^2} \frac{L}{2R} \frac{C}{2} = \frac{1}{4} Cu_0^2. \quad (\text{A3.14})$$

Um das Integral in (A3.13) zu lösen, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$a = -\frac{2\delta}{\omega_e}, \quad x = \omega_e t. \quad (\text{A3.15})$$

Damit wird aus dem Integral in (A3.13) [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_e} \int_0^\infty e^{ax} \sin^2 x dx &= \frac{1}{\omega_e} \left[\frac{e^{ax} \sin x}{a^2 + 4} (a \sin x - 2 \cos x) + \frac{2}{a^2 + 4} \int_0^\infty e^{ax} dx \right]_0^\infty \\
&\dots = \frac{1}{\omega_e} \left[\frac{e^{ax} \sin x}{a^2 + 4} (a \sin x - 2 \cos x) + \frac{2}{a^2 + 4} \frac{e^{at}}{a} \right]_0^\infty = \frac{1}{\omega_e} \frac{2}{a^2 + 4} \left(-\frac{1}{a} \right).
\end{aligned} \quad (\text{A3.16})$$

Lösen wir die Abkürzungen wieder auf, so folgt:

$$\dots = \frac{1}{\omega_e} \frac{2}{\left(\frac{2\delta}{\omega_e}\right)^2 + 4} \left(\frac{\omega_e}{2\delta}\right) = \frac{\omega_e^2}{4\delta^2 + 4\omega_e^2} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{4\delta} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} \quad (\text{A3.17})$$

A4

Die zu einem Zeitpunkt t auf C_1 und C_2 vorhandene Ladung ist gleich der anfänglich auf C_1 vorhandenen Ladung (Ladungserhaltung):

$$Q = q_1 + q_2. \quad (\text{A4.1})$$

Welche Energie geht nun insgesamt verloren (wir nehmen wieder an: $C_1 = C_2 = C$):

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} dE &= \int_Q^{Q/2} (u_{C_1} - u_{C_2}) dq_1 = \int_Q^{Q/2} \left(\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} \right) dq_1 = \int_Q^{Q/2} \left(\frac{q_1}{C} - \frac{Q - q_1}{C} \right) dq_1 = \int_Q^{Q/2} \left(\frac{2q_1}{C} - \frac{Q}{C} \right) dq_1 = \dots \\ \dots &= \left[\frac{q_1^2}{C} - Q \frac{q_1}{C} \right]_Q^{Q/2} = \frac{1}{C} \left(\frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2}{2} - Q^2 + Q^2 \right) = -\frac{Q^2}{4C} \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

Mit $u_{C_1}(0) = u_0$ und $Q = Cu_0$ folgt aus (A4.2):

$$\int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} dE = -\frac{1}{4} Cu_0^2.$$

Bezugsdokumente

- [1] I. Bronstein, K. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. Main, 19. Aufl., 1980, S. 114