Reflexion elektromagnetischer Wellen an einer Stoßstelle des Wellenwiderstands – Herleitung des Reflexions- und Transmissionsfaktors aus Energiesatz und Stetigkeitsbedingung

Reinhard Noll, DF1RN

Elektromagnetische Wellen werden an Stoßstellen des Wellenwiderstands reflektiert. Das gilt für leitungsgebundene Wellen, z.B. am Übergang zwischen zwei Koaxialkabeln mit unterschiedlichem Wellenwiderstand, als auch für Freiraumwellen, die sich in verschiedenen Medien ausbreiten.

Reflexions- und Transmissionsfaktor sollen hier für beliebige Zeitverläufe eines Signals hergeleitet werden.

Jeden Wellenzug eines beliebigen Zeitverlaufs können wir in eine Folge kurzer Rechteckimpulse zerlegen. Bild 1 zeigt einen solchen Rechteckimpuls der Breite τ , der auf eine Stoßstelle zwischen zwei Ausbreitungsabschnitten mit den Wellenwiderständen Z_1 , Z_2 trifft. Diese können wir als Leitungswellenwiderstände oder – bei Freiraumausbreitung wie z.B. in der Optik – als Feldwellenwiderstände interpretieren. Durch Aneinanderreihung kurzer Impulse mit unterschiedlichen Amplituden (und Vorzeichen) kann aufgrund des Superpositionsprinzips jeder beliebige Zeitverlauf eines Signals durch Aufsummierung erzeugt werden. Die Breite τ sei klein gegenüber einen typischen Änderungszeit des zu zerlegenden Signals.

Im dargestellten Beispiel betrachten wir Impulse auf einer Leitung und der weiterlaufende Rechteckimpuls hat eine größere Spannungsamplitude als der einlaufende Impuls (für $Z_2 > Z_1$). Das ist auf den ersten Blick vielleicht überraschend. Wir schauen uns daher die Energiebilanz an.

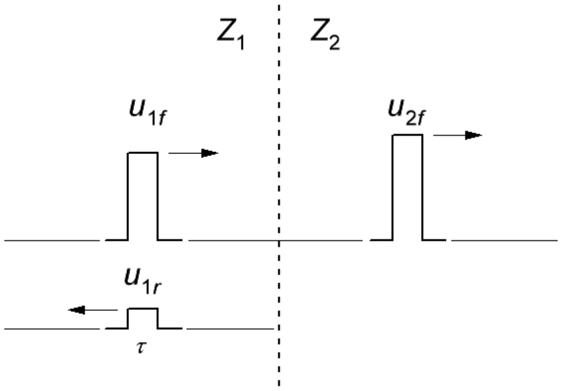

Bild 1: Rechteckpuls der zeitlichen Breite τ , mit der Spannungsamplitude u_{1f}, der von links kommend auf eine Stoßstelle des Wellenwiderstands an der vertikalen strichlierten Linie trifft und dort auf einen durchgehenden Impuls u_{2f} und einen reflektierten Impuls der Amplitude u_{1r} aufgeteilt wird. Die Amplitudenverhältnisse sind hier für den Fall Z_2/Z_1=1.5 dargestellt.

Die Energie eines Rechteckpulses der Dauer τ und der Spannungsamplitude u_{1f} , der auf der Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand Z_1 auf die Stoßstelle zuläuft, beträgt (wir gehen von reellen Wellenwiderständen Z_1 , Z_2 aus und vernachlässigen eine eventuelle Frequenzabhängigkeit):

$$W_{1f} = u_{1f} i_{1f} \tau = \frac{u_{1f}^2}{Z_1} \tau \tag{1}$$

Für die rücklaufende und die transmittierte Welle gilt entsprechend:

$$W_{1r} = \frac{u_{1r}^2}{Z_1} \tau \ , \ W_{2t} = \frac{u_{2t}^2}{Z_2} \tau \ . \tag{2}$$

Wenn wir annehmen, dass an der Stoßstelle keine Verluste auftreten und keine Quellen oder Senken vorhanden sind, so muss für diese Rechteckimpulse der Energiesatz gelten:

$$W_{1f} = W_{1r} + W_{2t} \ . \tag{3}$$

Aus (3) resultiert mit (1) und (2) nach Herauskürzen von τ die Beziehung:

$$\frac{u_{1f}^2}{Z_1} = \frac{u_{1r}^2}{Z_1} + \frac{u_{2f}^2}{Z_2}. \quad (4)$$

Weiterhin muss an der Stoßstelle die Spannung stetig verlaufen:

$$u_{1f} + u_{1r} = u_{2t}. \quad (5)$$

Definieren wir den Reflexions- und Transmissionsfaktor in der üblichen Form wie folgt:

$$r = \frac{u_{1r}}{u_{1f}}, \; t = \frac{u_{2f}}{u_{1f}} \quad (6)$$

und dividieren Gleichung (5) durch u_{1f} so erhalten wir:

$$1 + r = t. \quad (7)$$

Beziehung (7) folgt also direkt aus der Stetigkeitsbedingung der Spannung an der Stoßstelle. Dividieren wir (4) durch u_{1f}^2 und verwenden die Beziehungen (6) so ergibt sich:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{r^2}{Z_1} + \frac{t^2}{Z_2}. \quad (8)$$

Beziehung (8) wird umgeformt zu:

$$\frac{t^2}{Z_2} = \frac{1}{Z_1}\left(1 - r^2\right)$$

Wir eliminieren mit (7) den Reflexionsfaktor r:

$$\frac{t^2}{Z_2} = \frac{1}{Z_1}\left(1 - (t-1)^2\right) = \frac{1}{Z_1}\left(2t - t^2\right)$$

und erhalten schließlich nach einigen Umformungen für den Transmissionsfaktor die bekannte Beziehung:

$$t = \frac{Z_2}{Z_1}(2 - t),$$

$$t\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) = \frac{2Z_2}{Z_1},$$

$$t = \frac{2Z_2/Z_1}{1 + Z_2/Z_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}. \quad (9)$$

Wird (9) in (7) eingesetzt, so haben wir für den Reflexionsfaktor:

$$r = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} - 1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (10)$$

Die Beziehungen (9) und (10) folgen also aus dem Energiesatz und der Stetigkeitsbedingung der Spannung an der Stoßstelle. Die Spannungserhöhung des durchlaufenden Impulses im Falle von $Z_2/Z_1 > 1$, bedingt aufgrund des größen Z_2 einen kleineren Strom, sodass der Energiesatz nach (3), (4) erhalten bleibt.

Die hier hergleiteten Beziehungen (9) und (10) gelten nicht nur für leitungsgebundene Hochfrequenzsignale, sondern auch für Freiraumwellen bis in den Bereich des sichtbaren Lichts hinein. Tabelle 1 zeigt zum Vergleich die entsprechenden Beziehungen aus der Hochfrequenztechnik und der Optik. In der Optik werden statt der Spannungsamplituden die elektrischen Feldstärken E_{1f}, E_{1r}, E_{2f} im Freiraum betrachtet. Im Gegensatz zu den Spannungen der leitungsgebundenen HF-Signale sind die elektrischen Feldstärken im Freiraum im Allgemeinen räumliche Vektoren und die Wellen können in unterschiedlichen

Winkeln und Polarisationszuständen auf die Grenzfläche zwischen Z_1, Z_2 treffen. Wir betrachten hier für die Optik vereinfachend den senkrechten Einfall auf diese Stoßstelle. Aus den sogenannten Fresnel´schen Formeln folgen die entsprechenden Reflexions- und Transmissionsfaktoren, die in der Regel in der Optik mit den zugehörigen Brechungsindices der aneinander angrenzenden Ausbreitungsbereiche angegeben werden [1]. Sie lassen natürlich auch über die Wellenwiderstände darstellen und die erhaltenene Ausdrücke stimmen mit den oben hergeleiteten überein.

Tab. 1: Vergleich der Reflexions- und Transmissionsfaktoren in der Hochfrequenztechnik (HF) und in der Optik. Z_F Wellenwiderstand in einem dielektrischen Medium

	HF	Optik	Bemerkungen
einlaufende Welle im Medium 1	u_{1f}	E_{1f}	
rücklaufende Welle im Medium 1	u_{1r}	E_{1r}	
transmittierte Welle im Medium 2	u_{2f}	E_{2f}	
Wellenwiderstand	Z_1, Z_2		
Brechungsindex		n_1, n_2	Für den Feldwellenwiderstand eines Nichtleiters gilt: $Z_F = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} 120\pi\,\Omega$. Mit $\mu_r = 1$ und $n = \sqrt{\varepsilon_r}$, μ_r Permeabilitätszahl, ε_r relative Permittivität, folgt: $Z = 120\pi\,\Omega / n$
Reflexionsfaktor	$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$	$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$	für senkrechten Einfall, Fresnel´sche Formeln für ladungs- und stromfreie Grenzschicht, reeller Brechungsindex
Transmissionsfaktor	$t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$	$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$	

Fazit

Reflexions- und Transmissionsfaktoren an Stoßstellen des Wellenwiderstands lassen sich auf einfache Weise aus dem Energiesatz und der Stetigkeitsbedingung für die Spannung herleiten. In der Optik werden diese Größen üblicherweise über die Brechungsindices des Ausbreitungsmediums angegeben. Werden diese über den zugehörigen Feldwellenwiderstand ausgedrückt, so ergeben sich die identischen Beziehungen, wie sie aus der Hochfrequenztechnik bekannt sind.

18.3.2021, Reinhard Noll, DF1RN

Bezugsdokumente

[1] E. Hecht, A. Zajac, Optics, Addison-Wesley Publ. Comp. Inc., 1974, p. 72ff